Première 07. Probabilités ACTIVITÉS

• une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé

• l'ensemble $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ associé à une expérience aléatoire est l'**univers** ou l'**univers des possibles**

• notons $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'univers des possibles : $\{e_1\}$, …, $\{e_n\}$ sont des **événements élémentaires**, on dit aussi par abus de langage que $e_1, \dots, e_n$ sont des événements élémentaires
exemple : $\{e_2\}$ est un événement élémentaire

• tout sous-ensemble de l'univers Ω est un **événement**
exemple : $\{e_1; e_3\}$ est un événement

• l'**événement contraire** $\bar{A}$ d'un événement A est constitué de tous les événements élémentaires qui ne sont dans A, on dit que A et $\bar{A}$ sont deux événements contraires
exemple : $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\}$, $A = \{e_1; e_3\}$, $\bar{A} = \{e_2; e_4; e_5\}$

• $\emptyset$ est l'**événement impossible**, Ω est l'**événement certain**, $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$

• on dit que l'**événement** A **est réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est un événement élémentaire appartenant à A
exemple
on extrait au hasard une bille d'un sac contenant des billes numérotées $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 : l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $\{3\}$ est l'un des huit événements élémentaires, A : « obtenir un nombre impair » s'écrit $A = \{1; 3; 5; 7\}$ et est constitué des événements élémentaires $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ et $\{7\}$; si le résultat de l'expérience est $\{5\}$, c'est-à-dire si c'est le numéro 5 qui sort alors A est réalisé, si le résultat de l'expérience est $\{2\}$ alors A n'est pas réalisé, le contraire de A est $\bar{A}$: « obtenir un nombre impair » et il s'écrit aussi $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$.

$\boxed{D}$ E est un événement, on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire dans les mêmes conditions :
• la **fréquence** de E est le quotient du nombre de fois où E est réalisé par le nombre de répétitions de cette expérience.
exemple
on répète 200 fois dans les mêmes conditions une expérience aléatoire, on constate que l'événement E s'est réalisé 28 fois, donc la fréquence de E est : $\dfrac{28}{200} = 0{,}14$
• en répétant k fois dans les mêmes conditions une expérience aléatoire on dit que l'on réalise **un échantillon de taille k**.
• lorsque la taille de l'échantillon devient de plus en plus grande la fréquence d'apparition de E semble se « stabiliser » autour d'un nombre compris entre 0 et 1 appelé probabilité de l'événement E , donc :
probabilité de E = limite de la fréquence d'apparition de E lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$
• la probabilité de E se note $\boldsymbol{P}(E)$.

Quelque commandes utiles en Python :
• charger la bibliothèque aléatoire : `from random import *`
• générer un entier aléatoire x tel que $a \leqslant x \leqslant b$: `x=randint(a,b)`
où a et b sont deux entiers
• générer un pseudo réel aléatoire x tel que $0 \leqslant x < 1$: `x=random()`
• générer un réel aléatoire x tel que $a \leqslant x < b$: `a+(b-a)*random()`

A01 Écrire un programme Python qui simule 20 lancers d'une pièce de monnaie, affiche ce qui est obtenu, « Face » ou « Pile », calcule et affiche la fréquence d'apparition de « Face » pour cette simulation.
Modifier ce programme pour qu'il simule 1 000 000 de lancers et n'affiche que la fréquence d'apparition de «Face», en déduire une estimation de la probabilité d'« obtenir Face » lorsque lors d'un seul lancer de la pièce.

Notons $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'univers des possibles associé à une expérience aléatoire :

• $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$ et $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$

• $\boldsymbol{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)}$

• $\boldsymbol{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$ et $\boldsymbol{P(E) = 1 - P(\overline{E})}$

• si $E \cap F = \emptyset$ (E et F sont disjoints), alors : $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

• on dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité : $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$.

On écrit aussi plus simplement : $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = \frac{1}{n}$.

A02 Un sac contient :

— trois billes rouges portant respectivement les numéros : 1, 2 et 3,

— deux billes vertes portant respectivement les numéros : 1 et 2.

Les billes sont indiscernables au toucher donc il y a équiprobabilité d'obtention de chacune des 5 billes de ce sac.

On considère les événements :

R : « obtenir une bille rouge », V : « obtenir une bille verte »,

U : « obtenir une bille portant le numéro 1 », D : « obtenir une bille portant le numéro 2 » et enfin T : « obtenir la bille portant le numéro 3 ».

1. Déterminer $P(R)$ et $P(V)$.
2. Déterminer $P(U)$, $P(D)$ et $P(T)$.
3. On extrait une bille : elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 1 ? On vient de déterminer $P_R(U)$.
4. On extrait une bille : elle porte le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ? On vient de déterminer $P_U(R)$
5. On extrait une bille du sac contenant les 5 billes. Déterminer la probabilité que ce soit une bille rouge portant le numéro 1.
   On vient de déterminer $P(R \cap U)$.

• $\boldsymbol{P(E \cap F)}$: on ne sait rien au départ, on pioche dans la population totale et on cherche la probabilité que E et F se réalisent tous les deux.

• $\boldsymbol{P_E(F)}$: on sait que **E s'est réalisé**, on pioche dans le sous ensemble des événements élémentaires de E et on cherche la probabilité que F se réalise.

A03 Un sac contient trois cubes rouges, un cube vert et deux billes rouges. Lorsqu'un objet est extrait du sac on définit les événements :

C : « obtenir un cube », B : « obtenir une bille », R : « obtenir un objet rouge » et enfin V : « obtenir un objet vert ». Les 6 objets du sac ont tous la même chance d'être obtenus.

1. On extrait au hasard l'un objet des 6 objets du sac.
   Déterminer les probabilités : $P(C)$, $P(B)$, $P(R)$, $P(V)$ et $P(C \cap R)$.
2. Le sac contenant les 6 objets on ferme les yeux et on pioche un objet : on ressent qu'il s'agit d'un cube : déterminer la probabilité que l'objet soit de couleur rouge. Cette probabilité s'appelle « probabilité de R sachant que C s'est réalisé » et se note $P_C(R)$.
3. Vérifier que : $P(C \cap R) = P(C) \times P_C(R)$.

$\boxed{D}$ $P(A) \neq 0$, la **probabilité de B sachant A** se note $P_A(B)$.

$\boxed{F}$ Lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$ et $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$

$\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ et $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

A04 Un sac contient 3 pièces en OR et 7 pièces en ARGENT : on pioche une première pièce dont on note la nature, on <u>ne la remet pas</u> dans le sac puis on extrait à nouveau une pièce du sac et on note sa nature.

À l'aide d'un arbre de probabilité calculer les probabilités des événements

E : « obtenir deux pièces en OR », F : « obtenir deux pièces en ARGENT » et G : « obtenir deux pièces de natures différentes ».

$\boxed{D}$ On dit que les événements A, B, C réalisent une **partition de l'univers** lorsque les deux conditions suivante sont vérifiées :

- les événements sont deux-à-deux disjoints : $\boldsymbol{A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset}$
- leur réunion est égale à l'univers Ω : $\boldsymbol{A \cup B \cup C = \Omega}$.

On définit de même une partition constituée à n événements, $n \geqslant 2$.

$\boxed{i}$ A et $\bar{A}$ réalisent toujours une partition de l'univers.

$\boxed{F}$ **Quelques formules généralisables à une partition à n événements**

A, B, C réalise une **partition** de l'univers, alors :

- $\boldsymbol{P(A) + P(B) + P(C) = 1}$
- **(formule des probabilités totales)** pour tout événement E :

$$\boldsymbol{P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)}$$

autrement dit : $\boldsymbol{P(E) = P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E)}$

$\boxed{i}$ si la somme des probabilités de plusieurs événements est égale à 1 on ne peut pas en déduire qu'ils réalisent une partition de l'univers

A05 La moitié des bonbons du bocal sont de couleurs rouges : le quart de ceux-ci sont au chocolat au lait et les autres au chocolat noir.
Le quart des bonbons du bocal sont de couleurs verte : la moitié de ceux-ci sont au chocolat au lait et les autres sont au chocolat noir.
Tous les autres bonbons du bocal sont bleus : la moitié de ceux-ci sont au chocolat au lait et les autres sont au chocolat noir.

On extrait un bonbon du bocal et on définit les événements :
R : « obtenir un bonbon Rouge » V : « obtenir un bonbon Vert »
B : « obtenir un bonbon Bleu » L : « obtenir un bonbon chocolat au Lait »
et N : « obtenir un bonbon chocolat Noir ».

1. Construire un arbre de probabilité décrivant cette situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement L.
3. Les yeux fermés on vient de manger un bonbon chocolat au lait : quelle est la probabilité que son emballage soit rouge ?

$\boxed{D}$ Deux événements E et F de probabilités non nulles sont **indépendants** lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- $\boldsymbol{P(E \cap F) = P(E) \times P(F)}$ • $\boldsymbol{P_E(F) = P(F)}$ • $\boldsymbol{P_F(E) = P(E)}$

L'indépendance de deux événements indique que la réalisation de l'un d'eux ne donne aucune information sur la réalisation ou non réalisation de l'autre.

si deux événements de probabilités non nulles sont contraires alors ils ne sont pas indépendants : « être contraires » et « être indépendants » sont deux notions distinctes à ne pas confondre

$\boxed{F}$ Pour tous événements A et B : • $\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$ • $\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$

Le contraire d'une réunion est une intersection et inversement.

A06 Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. *On pourrait montrer que $\bar{A}$ et B sont indépendants et que A et $\bar{B}$ sont indépendants.*

A07 Le jeu utilise un dé dont 5 faces sont peintes en rouge et une en vert.
Un joueur lance deux fois de suite ce dé :

- s'il obtient deux fois la couleur verte, alors il gagne 100€,
- s'il obtient une fois la couleur verte et une fois la couleur rouge pas nécessairement dans cet ordre alors il gagne 1€,
- s'il obtient deux fois la couleur rouge alors il perd 10€.

On note G la variable aléatoire « gain algébrique du joueur » exprimé en €.

1. Résumer les données à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la loi de probabilité de G.
3. Calculer l'espérance mathématique de G. Si le joueur projette de jouer $10\,000$ parties, quelle somme d'argent peut-il « espérer » gagner ou perdre ?

$\boxed{D}$ La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est donnée par :

valeurs prises par X : x_i	x_1	...	x_n
probabilité correspondante : $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P(X = x_i) = 1} \text{ ou encore : } \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i = 1}$$

L'**espérance mathématique** de X est la moyenne des valeurs prises par X :

$$\boldsymbol{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P(X = x_i)\, x_i} \text{ ou encore : } \boldsymbol{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i\, x_i}$$

La **variance** de X est le nombre positif ou nul :

$$\boldsymbol{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P(X = x_i)\left(x_i - E(X)\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i\left(x_i - E(X)\right)^2}$$

L'écart type de X est la racine carrée de la variance de X : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

$\boxed{F}$ On peut démontrer que :

$$\boldsymbol{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i\, x_i^2 - [E(X)]^2} \quad (formule\ de\ König)$$

Quelques remarques :

- la formule de König s'écrit plus simplement : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$.
- on dit aussi formule de König-Huygens , de Koenig, de Koenig-Huygens

A08 Démontrer la formule de König dans le cas $n = 3$.

$\boxed{F}$ Soit X une variable aléatoire, a et b deux constantes, on a :

- $\boldsymbol{E(aX + b) = aE(X) + b}$
- $\boldsymbol{V(aX + b) = a^2V(X)}$
- $\boldsymbol{\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)}$

A09 Démontrer les trois formules précédentes dans le cas $n = 3$.

A10 On extrait successivement et sans remise deux pièces d'un porte-monnaie contenant au départ 4 pièces de 1€ et 6 pièces de 2€,
on note G la variable aléatoire somme des valeurs des deux pièces obtenues exprimée en euro.
Ainsi, si on a extrait deux pièces de 2€ , alors G prend la valeur 4€.

1. Résumer les données à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la loi de probabilité de G.
3. Calculer l'espérance mathématique de G.
4. Calculer la variance de G, en déduire l'écart type de G arrondi au centime.

A11 On note X la variable aléatoire qui donne la longueur en cm d'un spaghetti fabriqué par une machine. Les valeurs étant particulièrement proches, on définit la variable $Y = 10X - 200$.
Une étude de Y donne : $E(Y) = 210$ et $V(Y) = 25$.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

A12 Python
Pour un jeu donné, on note G le gain algébrique du joueur en € et on donne la loi de probabilité de G :

g_i	-20	2	50
$P(G = g_i)$	0,4	0,5	0,1

1. Calculer $E(G)$. Un joueur va joueur 1 500 parties cette année. Quelle somme d'argent peut-il « espérer » gagner ou perdre cette année avec ce jeu ?
2. Écrire un programme Python qui simule cette situation.