

Dans tout ce chapitre une unité de distance est choisie.

D Rappel sur les normes

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- si $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{MN}\| = MN$

D Définition du produit scalaire

Une unité de distance étant choisie, on appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

D Si α est une mesure en radian de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors une mesure de $(\vec{v}, \vec{u})$ est $(-\alpha)$ et on a : $\cos(\vec{v}, \vec{u}) = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \widehat{BAC}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

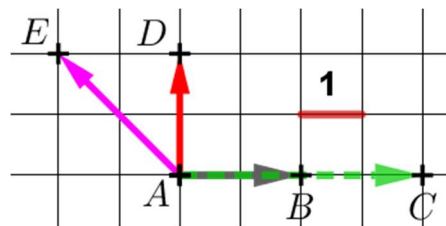
P Pour $A \neq B$ et $A \neq C$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

P Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

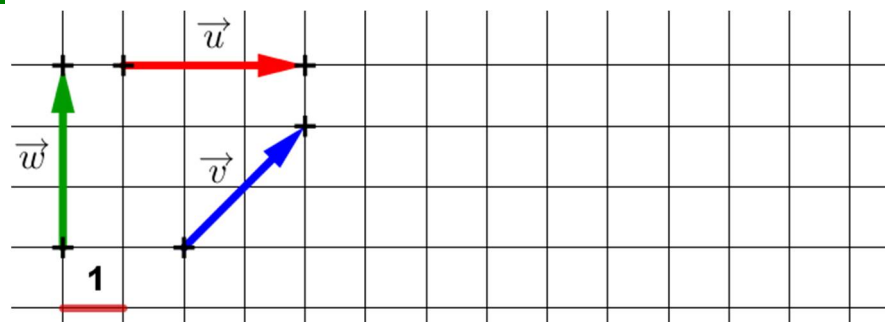
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \bullet \quad (-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \bullet \quad \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$$

A01 • Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- Calculer la distance AE puis calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.



A02 Avec quadrillage

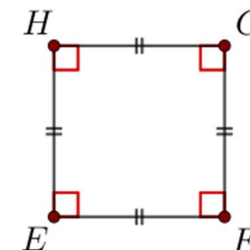


1. Déterminer $\vec{u} \cdot \vec{w}$.
2. À l'aide du quadrillage, déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ et déterminer $\|\vec{v}\|$, en déduire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

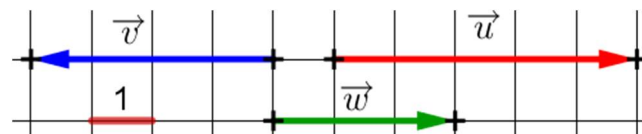
À retenir : lorsque les deux vecteurs d'un produit scalaire « commencent » par des points différents on peut dessiner des représentants de ces vecteurs **à partir d'un même point** du plan : cela permet de déterminer facilement l'angle !

A03 $EF = 7$

1. Déterminer : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{HG}$.
2. Déterminer : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH}$.



A04 Déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot \vec{u}$



[P] produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

► • si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont colinéaires de même sens alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{+ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}_{\text{produit des normes}}$$

► • si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont colinéaires de sens contraires alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{- \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}_{\text{opposé du produit des normes}}$$

[D] • orthogonalité de deux vecteurs donnés à l'aide de points

A, B, C et D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ alors :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ($\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$) $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

• orthogonalité de deux vecteurs purs

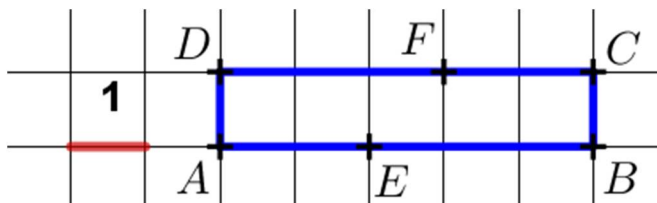
Par convention : $\vec{0}$ est **orthogonal** à tout vecteur.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque

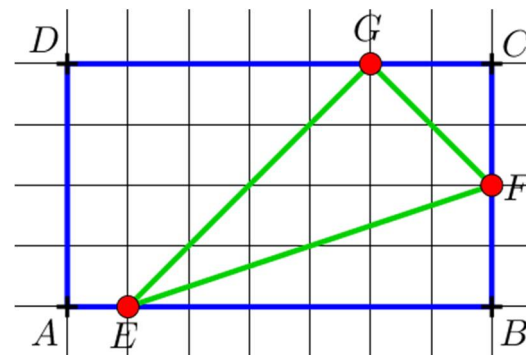
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ où A, B, C et D vérifient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

[P] Théorème fondamental : ► $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

A05 Déterminer : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}$:



A06 E, F et G appartiennent aux côtés du rectangle $ABCD$ avec $AE = 1$, F est le milieu de $[BC]$, $CG = 2$:



1. En utilisant le quadrillage, déterminer EF, EG, GF .
2. Déterminer la nature de EFG , en déduire : $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}$.

[P] Dans un repère **orthonormé** on considère deux points A et B et un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors :

► $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ► $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

A07 Un élève affirme que « la norme d'une somme de vecteurs est égal à la somme des normes » : trouver un contre-exemple.

[P] (preuve très difficile, PDF) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2] (*)$$

[P] Pour tout $\vec{u}$ et tout réel k : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

A08 Dédurre de (*) que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2] (**)$$

[F] Pour tous points A, B et C :

► $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] \quad (***)$

🔥 les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même point origine.

A09 Démontrer la propriété précédente à partir de (**).

A10 $AB = 5, AC = 6$ et $BC = 10$, calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

A11 $EF = 4, EG = 5$ et $FG = 7$, calculer : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}$.

A12 Soit ABC un triangle tel que : $AB = 5, AC = 7, BC = 9$.
Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$, puis à l'aide de la calculatrice, en déduire la mesure de $\widehat{BAC}$ arrondie au degré.

A13 Soit ABC un triangle.

À l'aide de la formule (**) démontrer l'équivalence :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

A14 Dans un repère **orthonormé** on considère $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. M.Q. : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2 + 2(xx' + yy')$

2. À l'aide de la formule (*) démontrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

[P] **Expression du produit scalaire en repère orthonormé**

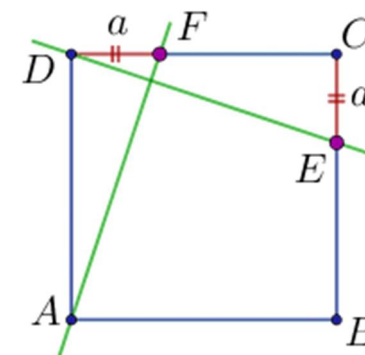
Dans un repère **orthonormé**, pour tout $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

► $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

A15 Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 7,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$: sont-ils orthogonaux ?

A16 $ABCD$ est un carré de côté 1. On munit le plan du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

- déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DE}$
- démontrer que $(AF) \perp (DE)$



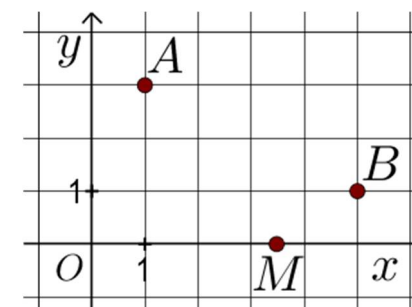
A17 Dans un repère orthonormé on considère $A(5; 2)$ et $B(1; 4)$; donner l'équation réduite de la médiatrice de $[AB]$.

A18 Dans un repère orthonormé, m représentant un paramètre réel, on considère $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m+1 \\ -2 \end{pmatrix}$: pour quelle(s) valeur(s) de m les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

A19 Dans un repère orthonormé on donne $A(1; 3)$ et $B(5; 1)$.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note M le point du plan tel que $x_M = m$ et $y_M = 0$ (voir figure).

Pour quelle(s) valeur(s) de m le triangle ABM est-il rectangle en M ?



[D] • $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un **vecteur directeur** d'une droite $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ il existe deux points distincts A et B de cette droite tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **colinéaires**

• $\vec{n} \neq \vec{0}$ est un **vecteur normal** à une droite $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ il existe deux points distincts A et B de cette droite tels que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **orthogonaux**

[i] intuitivement : un vecteur directeur est « parallèle à la droite » et un vecteur normal est « perpendiculaire à la droite ».
Tout multiple non nul d'un vecteur directeur est encore un vecteur directeur, tout multiple non nul d'un vecteur normal est encore un vecteur normal.

[P] Dans le plan muni d'un repère, toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a et b non tous les deux nuls, appelée **équation cartésienne**.

[i] Une droite admet une multitude d'équations cartésiennes mais elle n'admet qu'une seule équation réduite.

A20 Dans plan muni d'un repère, d est la droite passant par $A(1 ; 2)$ et admettant $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
Donner une équation cartésienne puis l'équation réduite de d .

A21 Dans plan muni d'un repère, Δ est la droite passant par $E(5 ; 1)$ et admettant $\vec{n} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
Donner une équation cartésienne puis l'équation réduite de Δ .

[P] ► Soient a et b deux réels non tous les deux nuls, dans un repère quelconque du plan la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme **vecteur directeur**.

[P] ► Soient a et b deux réels non tous deux nuls, dans un repère orthonormé du plan la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur normal**.

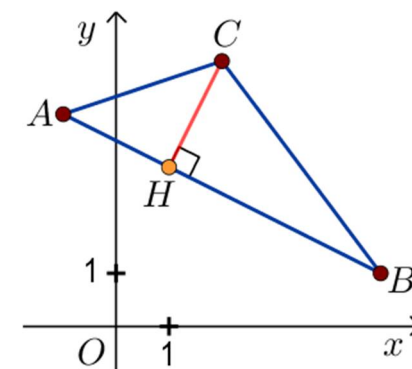
[astuce] vecteur normal : coefficients dans l'ordre normal.

A22 Justifier la formule du vecteur normal.

A23 Dans un repère orthonormé du plan donner une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ où $A(1 ; 3)$ et $B(5 ; 1)$.

A24 Dans un repère orthonormé, on donne : $A(-1 ; 4)$, $B(5 ; 1)$ et $C(2 ; 5)$.

On note H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC (voir figure).



1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer une équation de (AB) .
3. Déterminer une équation de (CH) .
4. À l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues calculer les coordonnées de H .
5. Déterminer l'aire du triangle ABC .

A25 Dans le plan munit d'un repère **orthonormé** on donne :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ en fonction de x, x', x'', y, y' et y'' .
2. Exprimer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$ en fonction de x, x', x'', y, y' et y'' .
3. Dédire de ce qui précède que : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

[P] Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

$$\blacktriangleright \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \blacktriangleright (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

A26 Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel, justifier que :

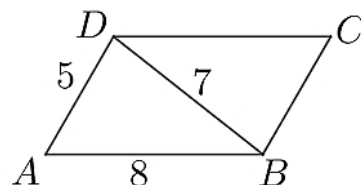
$$\vec{u} \cdot k\vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad k\vec{u} \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

[P] Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u} \cdot k\vec{v} = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

A27 On donne $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3$, déterminer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 5\vec{w})$.

A28 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 8, AD = 5, BD = 7$.
Calculer : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

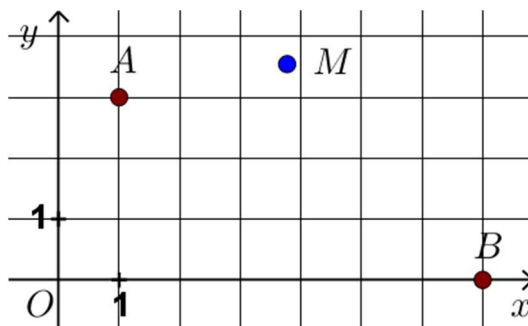


A29 Repère orthonormé,

$A(1; 3)$ et $B(7; 0)$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 15$$

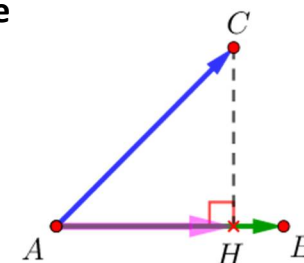


[P] Théorème de projection orthogonale

$A \neq B$, pour tout point C de projeté orthogonal H sur (AB) on a :

$$\blacktriangleright \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

$$\blacktriangleright \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$$



A30 Démontrer le théorème de projection orthogonale.

A31 $AB = 6$, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 12$.

A32 $AB = 4$, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -8$.

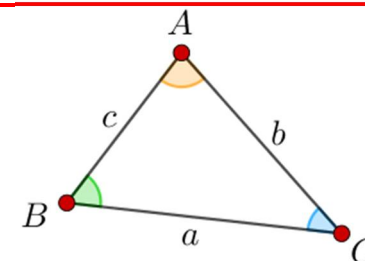
[P] Formule d'Al-Kashi

Pour tout triangle ABC avec les notations de la figure on a :

$$\blacktriangleright a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

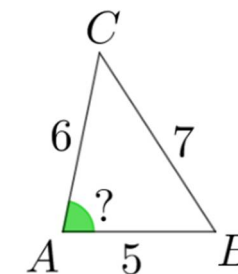
Autrement dit :

$$\blacktriangleright BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$



A33 On considère un triangle ABC tel que : $AB = 5, AC = 6$ et $BC = 7$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$.
2. En déduire la mesure de $\widehat{BAC}$ arrondie à $0,1^\circ$.



[D] Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même s'appelle le **carré scalaire** du vecteur : le carré scalaire de $\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$.

[P] Pour tous points A et B et tout vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{ et } \blacktriangleright AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$$

[P] « identités remarquables »

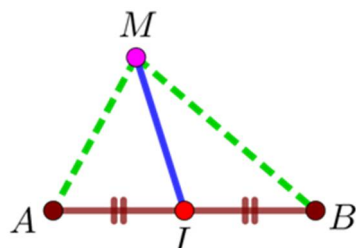
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

[F] Théorème de la médiane

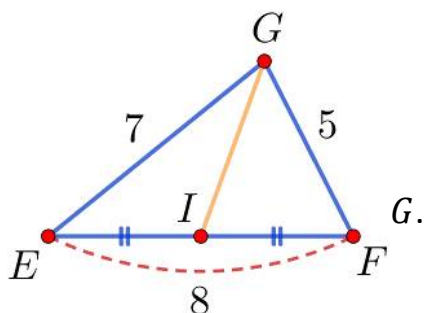
Soient A et B deux points, I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



A34 Démontrer le théorème de la médiane.

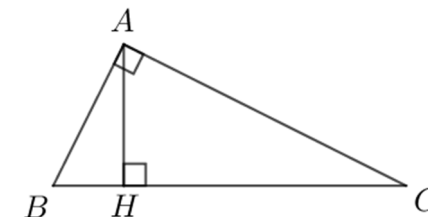
A35 Calculer GI .



A36 $AB = 6$, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 12$.

A37 Soit ABC un triangle rectangle en A , H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Démontrer que :

$$HB \times HC = HA^2$$



[P] Dans un repère orthonormé l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ avec $r > 0$ est le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r .

Cette équation s'appelle parfois l'**équation canonique** de (C) .

[i] Explication : $M(x; y) \in C_{\Omega(a;b),r} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

A38 Dans un repère orthonormé du plan déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

A39 On munit le plan d'un repère orthonormé. Déterminer les coordonnées du point d'intersection du cercle C de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $\sqrt{10}$ et de la droite d d'équation $y = 3$:

