Première 04. Suites numériques ACTIVITÉS

Exemple n°1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $u(n) = \sqrt{2n+3}$; on a alors :
$u(0) = \sqrt{2(0)+3} = \sqrt{3}$, on écrit : $u_0 = \sqrt{3}$, le **terme** u_0 a pour **indice** 0 et il a pour valeur $\sqrt{3}$, c'est le **terme initial** de la **suite** (u_n),
$u(10) = \sqrt{2(10)+3} = \sqrt{23}$, on écrit : $u_{10} = \sqrt{23}$, u_{10} est le terme d'indice 10 et il a pour valeur $\sqrt{23}$. Dans cet exemple il est possible de calculer directement un terme dont l'indice est connu : la suite (u_n) est donc donnée de **manière explicite**, par une **formule explicite**.

$\boxed{D}$ Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$ ou de $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;\dots\}$ vers $\mathbb{R}$, autrement dit c'est une fonction dont la variable est un entier naturel n. Le pas confondre « u_n » qui un nombre réel avec « (u_n) » qui représente la totalité de la suite.

Exemple n°2

On pose : $u_0 = 0{,}25$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, alors :
- pour $n = 0$ on obtient : $u_1 = 2u_0 + 1 = 2(0{,}25) + 1 = 1{,}5$
- pour $n = 1$ on obtient $u_2 = 2u_1 + 1 = 2(1{,}5) + 1 = 4$ etc.

On peut calculer « de proche en proche » les termes de la suite (u_n) : elle est donc donnée par **récurrence**.

$\boxed{D}$ **Sens de variation d'une suite (u_n)**
- (u_n) est **croissante** $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$
- (u_n) est **croissante à partir du rang n_0** $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$
- (u_n) est **décroissante** $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1}$
- (u_n) est dé**croissante à partir du rang n_0** $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \geqslant u_{n+1}$

$\boxed{i}$ Les termes d'une suite croissante « vont en augmentant », ceux d'une suite décroissante « vont en diminuant ».

$\boxed{P}$ **sens de variation par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$**
(u_n) est **croissante** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$ **est positif ou nul**
(u_n) est **décroissante** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$ **est négatif ou nul**

A01 Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 + 3$ et $v_n = \frac{1}{n+2} + 5$.

A02 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$
- démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)}$$
- en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$\boxed{P}$ Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$:
- si f est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est **croissante**
- si f est **décroissante** sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est **décroissante**

attention : les réciproques sont fausses

A03 Déterminer de deux façons différentes le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

$\boxed{D}$ Une suite est **arithmétique** de **raison r** $\in \mathbb{R}$ lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** la constante r :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

$\boxed{D}$ Une suite est **géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{R}$ lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par la constante $\boldsymbol{q}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times \boldsymbol{q}$$

$\boxed{i}$ Déterminer « la nature d'une suite », c'est dire si elle est arithmétique, ou géométrique, ou ni l'un ni l'autre.

$\boxed{P}$ **quelques propriétés**

- une suite (u_n) est **arithmétique** de raison r lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

(on dit que la différence entre deux termes consécutifs est constante)

- une suite arithmétique de raison r est :
  - strictement croissante lorsque r est strictement positif $(r > 0)$,
  - constante lorsque r est nul $(r = 0)$,
  - strictement décroissante lorsque r est strictement négatif $(r < 0)$.

- une suite (u_n) dont aucun terme n'est nul est **géométrique** de raison q lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

(on dit que le **quotient de deux termes consécutifs est constant**)

$\boxed{M}$ Pour démontrer qu'une suite (u_n) :

- est arithmétique, on montre que $u_{n+1} - u_n =$ constante $(= r)$
- n'est pas arithmétique, on constate que $u_1 - u_0$ est différent de $u_2 - u_1$
- est géométrique, on montre que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$ constante $(= q)$
- n'est pas géométrique, on constate que $\dfrac{u_1}{u_0}$ est différent de $\dfrac{u_2}{u_1}$

A04 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 7$, déterminer la nature de la suite (u_n).

A05 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times 2^n$, déterminer la nature de la suite (u_n).

A06 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 1$, déterminer la nature de la suite (u_n).

$\boxed{F}$ Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p on a :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

En particulier :

$$u_n = u_0 + n \times r \quad \text{et} \quad u_n = u_1 + (n-1) \times r.$$

$\boxed{i}$ En appliquant ces formules on obtient la forme explicite de u_n.

A07 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $u_3 = 10$ et $u_5 = 14$. Déterminer l'entier naturel p tel que : $u_p = 86$.

$\boxed{F}$ Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

$\boxed{i}$ En appliquant ces formules on obtient la forme explicite de u_n.

A08 On pose $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 40$.

1. Écrire un programme Python qui demande n et retourne u_n.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.

- **a.** Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
- **b.** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
- **c.** Démontrer que (u_n) est croissante et est majorée par 200.

$\boxed{P}$ On relève « quelque chose » périodiquement et on note u_n sa valeur au bout de n périodes de temps, alors :

- (u_n) est **arithmétique** lorsque l'on passe d'un relevé au suivant en ajoutant ou retranchant une constante (ce sera la raison r de la suite)
- (u_n) est **géométrique** lorsque l'on passe d'un relevé au suivant par une variation à pourcentage constant et on a alors $q = 1 + \frac{t}{100}$

où $t\%$ est le pourcentage constant de la variation : t est positif pour une hausse et est négatif pour une baisse.

exemples :

- pour une hausse de 5% on a : $t = +5$, $q = CM = 1{,}05$
- pour une baisse de 5% on a : $t = -5$, $q = CM = 0{,}95$

$\boxed{F}$ **Compter le nombre de termes dans une somme**

Dans « $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ », il y a $(n - p + 1)$ termes ajoutés :

nombre de termes ajoutés = différence des indices **+ 1**

A09 Déterminer le nombre de termes ajoutés dans chacune des sommes :

$A = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 + u_{10}$ $\quad B = u_5 + u_6 + \cdots + u_{14} + u_{15}$

$C = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $\quad D = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

$\boxed{F}$ Si (u_n) est une suite arithmétique, alors :

$$u_0 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$$

On retiendra :

$$\frac{(\text{premier} + \text{dernier terme de la somme}) \times \text{nombre de termes ajoutés}}{2}$$

A10 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0{,}25$; calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

$\boxed{P}$ Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On retiendra :

$$\text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1 - q}$$

A11 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$; calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

A12 **La tour de Hanoï …**

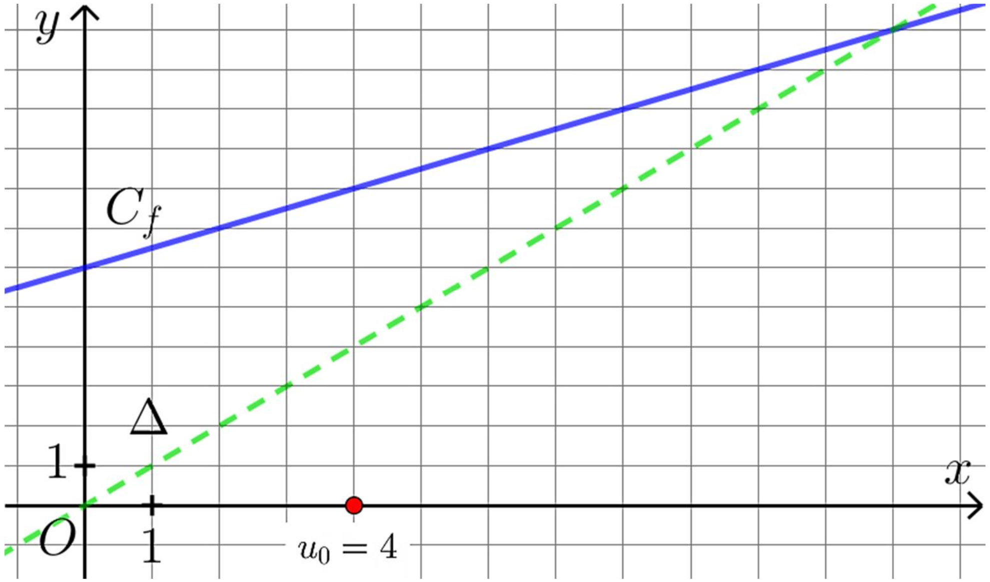
Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = u_n + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, en déduire u_{76}.

A13 $u_0 = 80$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 40$.

1. Écrire un programme Python qui demande d'entrer n puis affiche la valeur de u_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 160$.
   a. Montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n < 160$.

A14 $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$; on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 6$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$:



1. Visualiser u_1,u_2, u_3 sur l'axe des abscisses du repère et donner leurs valeurs par lecture graphique ; vérifier par le calcul.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 12$.
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n, en déduire que (u_n) est strictement croissante et que pour tout entier naturel n : $u_n < 12$.
4. Écrire un programme Python qui affiche le plus petit entier n_0 pour lequel $u_{n_0} > 11{,}999$.