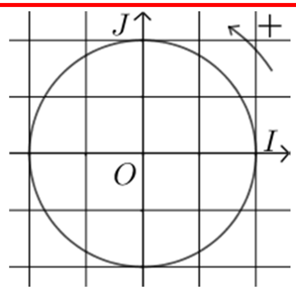
définition
Dans un repère orthonormé (O, I, J) on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé **sens trigonométrique** ou encore **sens positif**.



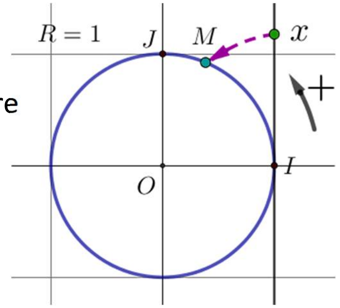
formule Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π.

A01 Justifier la valeur du périmètre du cercle trigonométrique.

définition Pour tout réel x, on pose : $|x| = \sqrt{x^2}$.

Propriétés Pour tout réel x :
- $|x| \geqslant 0$
- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$

définition
Par « enroulement » de la droite réelle tangente au cercle trigonométrique en $I(1\ ;0)$ tout nombre réel x vient s'appliquer sur un point M appelé **image du réel x sur le cercle trigonométrique** :
pour placer M on part de $I(1;0)$, on parcourt un arc de cercle de longueur $|x|$ dans le sens positif ou bien dans le sens négatif suivant que x est positif ou négatif.



On dit qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est x radian (rad).

astuce : $\boldsymbol{\pi\, rad = 180° = \frac{1}{2}}$ **tour**

A02 Marquer sur le cercle trigonométrique les points suivants :
- A image de π
- B image de $\frac{\pi}{2}$
- C image de $(-\frac{\pi}{2})$.

définition
Soir x réel d'image M sur le cercle trigonométrique, alors $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnée de M, autrement dit $M(\cos(x)\ ;\sin(x))$.

nombre réel x → point M sur le cercle trigonométrique → l'abscisse de M est $\cos(x)$; l'ordonnée de M est $\sin(x)$

A03 Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique :
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \cos(\pi), \sin(\pi)$$

A04 Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique : $\cos(4\pi)$ et $\sin(4\pi)$.

formule
Deux réels x et x' ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $x - x' = k \times 2\pi$.

A05 Les deux réels proposés ont-ils même point image sur le cercle trigo. ?

1. $\frac{7\pi}{5}$ et $\frac{57\pi}{5}$ **2.** $-\frac{\pi}{7}$ et $\frac{34\pi}{7}$

formule Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

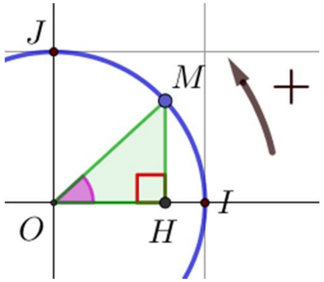
A06 Pour un certain nombre α, on a : $5\cos^2\alpha - 11\cos\alpha + 2 = 0$.
Déterminer la valeur de $\cos\alpha$.

A07 démonstration du cours dans un cas particulier
(O, I, J) est un repère orthonormé, x un réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ d'image M sur le cercle trigonométrique ; en exprimant de deux façons différentes OM^2 démontrer que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

formule Pour tout réel x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

A08 démonstration du cours (en autonomie)

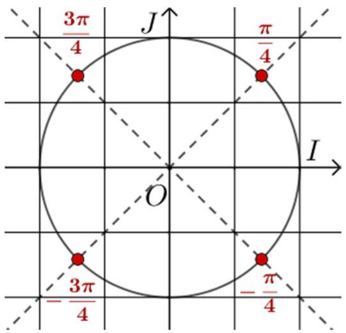
Notons M le point image du réel $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses $(O\,;\overrightarrow{OI})$.



- Démontrer que $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- Par lecture graphique, indiquer le signe de y_M, puis en utilisant la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

angles multiples de $\frac{\pi}{4}$

On trace les deux bissectrices des axes du repère, alors pour les points non triviaux du cercle trigonométrique les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ valent $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, l'observation sur les axes du repère permettant d'en déterminer le signe.



A09 Donner :

$$A = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad B = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad C = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad D = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

A10 $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin^4(x) + 2 \times \sin^2(x) \times \cos^2(x) + \cos^4(x)$.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.

A11 Déterminer $x \in [0\,;2\pi]$ tel que : $2(\sin x)^2 + \left(\sqrt{2} - 6\right)\sin x = 3\sqrt{2}$.

A12 démonstration du cours (en autonomie)

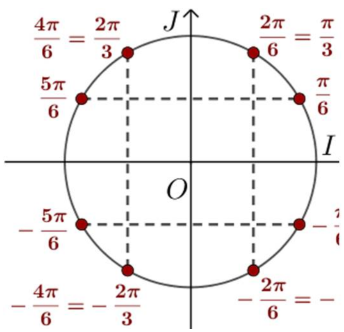
Notons M le point image de $\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses $(O\,;\overrightarrow{OI})$.

- Déterminer la mesure en degré des angles du triangle OHM.
- Démontrer que $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
- Par lecture graphique, indiquer le signe de y_M puis en utilisant la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

angles multiples de $\frac{\pi}{6}$

On trace un quadrillage « calé » sur les $\pm\frac{1}{2}$ alors pour les points non triviaux du cercle trigonométrique les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ valent :

$\pm\frac{1}{2}$ pour l'un des deux et $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour l'autre.



A13 Déterminer :

$$A = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad B = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad C = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad D = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

A14 Déterminer tous les réels x tels que : $\cos x = \frac{1}{2}$.

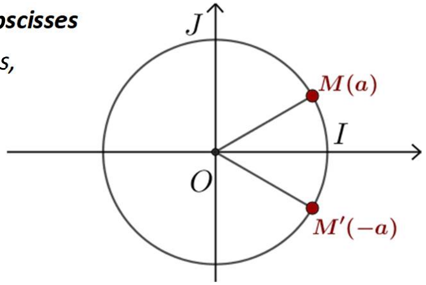
A15 Déterminer tous les réels x tels que : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

A16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2 \times \cos^2 x - 5 \times \cos x - 3 = 0$.

angles associés (série 1)

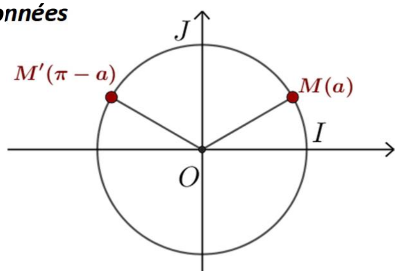
• *deux points **symétrique par rapport à l'axe des abscisses** ont des abscisses égales et des ordonnées opposées, on en déduit que pour tout réel a :*

$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$



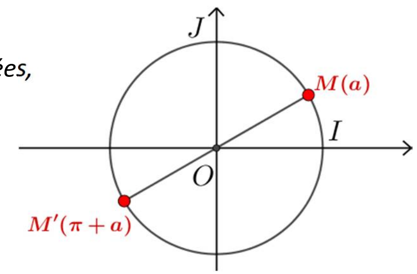
• *deux points **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** ont des abscisses opposées et des ordonnées égales on en déduit que pour tout réel a :*

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$



• *deux points **diamétralement opposés** sur le cercle ont des abscisses opposées et des ordonnées opposées, on en déduit que pour tout réel a :*

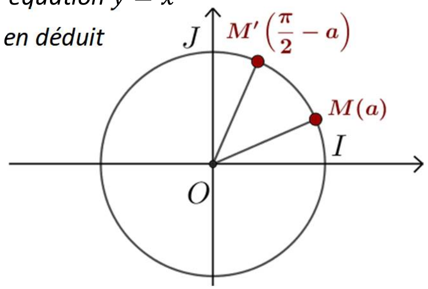
$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$



angles associés (série 2)

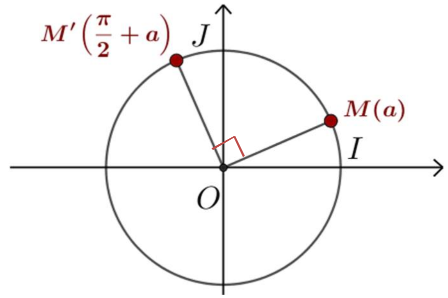
• *deux points **symétrique par rapport** à la droite d'équation $y = x$ ont des abscisses et des ordonnées permutées, on en déduit que pour tout réel a :*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$



• *lorsque M' s'obtient par un quart de tour direct à partir de M, alors : $x_{M'} = -y_M$ et $y_{M'} = x_M$ on en déduit que pour tout réel a :*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$$



A17 Calculer :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \quad \text{et} \quad B = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

A18 Démontrer que, pour tout réel x :

$$2\cos(\pi - x) + 3\cos(-x) + \cos(\pi + x) = 0$$

A19 Démontrer que, pour tout réel x :

$$\cos^2(\pi + x) + \sin^2(-x) = 1$$

A20 Démontrer que :

• $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0$ • $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) = 0$

A21 Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 0$$

A22 Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) = 0$$

A23 Démontrer que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) = 1$$