$1^{\text{ère}}$ **01. Second degré** **ACTIVITÉS**

Dans ce chapitre, on va apprendre à :

- donner la forme canonique d'une expression ax^2+bx+c, $a\neq 0$
- factoriser dans $\mathbb{R}$ une expression ax^2+bx+c, $a\neq 0$ (lorsque possible)
- dresser le tableau de signes d'une expression ax^2+bx+c, $a\neq 0$
- résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
- déterminer le sens de variation d'une fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

$\boxed{D}$ **quelques définitions**

- f est une fonction **polynôme du second degré** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ il existe des réels a, b, c avec $a\neq 0$ tels que, pour tout réel x : $f(x)=ax^2+bx+c$
- dans ax^2+bx+c : ax^2 est le **terme de plus haut degré**, bx s'appelle parfois terme du milieu et c est le **terme constant**
- $E(x)$ est une **expression du second degré en x** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $E(x)$ peut s'écrire sous la forme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$
- la **forme canonique** de ax^2+bx+c s'écrit : $a(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont deux constantes réelles

$\boxed{méthode}$ **obtenir « à la main » la forme canonique**

- cas particulier $a=1$ pour obtenir la forme canonique de x^2+bx+c

$$\boxed{x^2}-\boxed{6x}+\boxed{5}=\boxed{(x)^2}-\boxed{2(x)(3)}+(3)^2-9+\boxed{5}=(x-3)^2-4$$

$(x-3)^2-4$ est de la forme $\boldsymbol{a}(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\begin{cases}\boldsymbol{a}=1\\ \alpha=3\\ \beta=-4\end{cases}$

- cas général : on met de force $\boldsymbol{a}$ en facteur

$$2x^2-x-1=2\left[\frac{2x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right]=2\left[x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[(x)^2-2(x)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{8}{16}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-2\times\frac{9}{16}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

A01 Déterminer la forme canonique de : $A(x)=x^2+8x-9$ $B(x)=x^2-5x+1$ $C(x)=x^2+6x+9$ $D(x)=(x-1)(x+4)$

$\boxed{F}$ a, b, c réels, $a\neq 0$, en posant $\Delta=b^2-4ac$ on a pour tout réel x :

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}\quad(*)$$

$\boxed{D}$ La nombre $\Delta=b^2-4ac$ est le **discriminant** de ax^2+bx+c.

A02 Déterminer le discriminant de : $E(x)=x^2+5x+2$, $F(x)=x^2+3x$, $G(x)=-x^2+x+1$ et $H(x)=x^2-2x+3$.

A03 Retrouver la formule précédente en partant de ax^2+bx+c, $a\neq 0$.

$\boxed{F}$ **canoniser par les formules du cours**

- la forme canonique de $\boldsymbol{a}x^2+bx+c$ $(\boldsymbol{a}\neq 0)$ est $\boldsymbol{a}(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{4a}}$
- en posant $f(x)=\boldsymbol{a}x^2+bx+c$ $(\boldsymbol{a}\neq 0)$ la forme canonique de $f(x)$ est $\boldsymbol{a}(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{f(\alpha)}=-\dfrac{\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{4a}}$.

A04 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $2x^2-7x+6$.

$\boxed{F}$ **factorisation de $\boldsymbol{ax^2+bx+c, a\neq 0}$ dans $\mathbb{R}$ (parfois impossible)**

Soient a, b et c des constantes, $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant :

- si $\Delta>0$, alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$, avec :

$$\boldsymbol{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\quad\text{et}\quad\boldsymbol{x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- si $\Delta=0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2}$, avec :

$$\boldsymbol{x_0=\frac{-b}{2a}}$$

- si $\Delta<0$, alors ax^2+bx+c n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$

On dit que x_1 et x_2 sont des **racines** et que x_0 est une **racine double**.

A05 Démontrer les formules de factorisation de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

A06 Factoriser dans $\mathbb{R}$ lorsque cela est possible.

$A(x) = 2x^2 - 7x + 3$ $\quad$ $B(x) = x^2 + x - 2$

$C(x) = 9x^2 - 12x + 4$ $\quad$ $D(x) = -4x^2 + 20x - 25$

$E(x) = x^2 + 6x + 10$ $\quad$ $F(x) = -x^2 + 3x - 5$

A07 Factoriser : $G(x) = (2x-1)(x+4) + 6x^2 - 5x + 1$.

A08 Factoriser : $H(x) = x^2 - 9x - (x-9)(2x-1)$.

méthode **factorisation : les cas particuliers**

• pour factoriser $\boldsymbol{ax^2 + bx}$, $a \neq 0$: x apparaissant dans tous les termes on peut le mettre en facteur

• pour factoriser $\boldsymbol{ax^2 + c}$, $a \neq 0$: on tente de faire apparaître forme $(\dots)^2 - (\dots)^2$ qui se factorise par l'identité remarquable

$$(A)^2 - (B)^2 = (A+B)(A-B)$$

mais si on fait apparaître $(A)^2 + k^2$ ou $-(A)^2 - k^2$, k constante non nulle alors l'expression $ax^2 + c$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

A09 (sans rédaction) Factoriser dans $\mathbb{R}$, lorsque cela est possible :

$A(x) = x^2 - 25$ $\quad$ $B(x) = 4x^2 - 9$ $\quad$ $C(x) = -x^2 + 7$

$D(x) = x^2 + 4$ $\quad$ $E(x) = -25x^2 + 4$ $\quad$ $F(x) = -x^2 - 9$

$G(x) = 4x^2 + 5$ $\quad$ $H(x) = -25x^2 + \dfrac{4}{49}$ $\quad$ $I(x) = -x^2 - 3$

A10 Factoriser : $A(x) = x^2 - 4 + (3x+5)(x+2)$.

A11 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $X^2 - 5X - 36$, puis $x^4 - 5x^2 - 36$.

A12 Pour tout réel x, on pose : $E(x) = -x^2 + 12x - 35$.

• factoriser $E(x)$

• dresser le tableau de signes de $E(x)$

• résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $12x - 35 \leqslant x^2$

P **tableau de signes de l'expression $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$**

• si $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines réelles distinctes alors on utilise la règle « $\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$ est **du signe de $\boldsymbol{a}$ à** l'**extérieur** des racines ».

• si $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet une seule racine alors on utilise la règle « $\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$ est **partout du signe de $\boldsymbol{a}$** et **s'annule une fois** »

• si $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) n'admet aucune racine réelle alors on utilise la règle « $\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$ est **partout du signe de $\boldsymbol{a}$** et **ne s'annule jamais** ».

• si $\Delta > 0$ (en supposant $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$		signe de $\boldsymbol{a}$	0	signe de $(-\boldsymbol{a})$	0	signe de $\boldsymbol{a}$	

• si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$		signe de $\boldsymbol{a}$	0	signe de $\boldsymbol{a}$	

• si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\boldsymbol{a}x^2 + bx + c$		signe de $\boldsymbol{a}$	

A13 Résoudre l'inéquation : $(2x-1)(x+2) \geqslant 3$.

A14 Résoudre l'inéquation : $(x-5)(-x+7) > -x + 1$.

A15 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x-5}{-x^2+3x+4} \leqslant 0$$

$\boxed{F}$ **équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$**

Considérons l'équation (E) : $ax^2+bx+c=\mathbf{0}$ $(a\neq 0)$

• Si $\Delta>0$ alors elle admet **deux solutions** réelles distinctes :

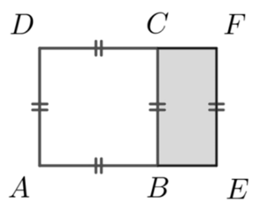
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

• Si $\Delta=0$ alors elle admet **une seule** solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

• Si $\Delta<0$ alors elle n'a **pas de solution** réelle.

$\boxed{D}$ Une **racine** de l'expression du second degré ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ est une solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

A16 Un studio d'aire $24\ m^2$ est constitué d'une pièce à vivre qui est un carré $ABCD$ et d'une cuisine qui est un rectangle $BEFC$ avec $BE=2\ m$.
Déterminer la longueur AE et la largeur AD de ce studio.



A17 Résoudre dans $\mathbb{R}$: • $x(3x-1)=10$ • $x^2-3x\sqrt{3}=12$.

A18 Une unité de distance étant choisie, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB=x$, $AC=x+1$ et $BC=x+2$.
Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 6.

somme et produit des racines

Soit ax^2+bx+c une expression admettant deux racines distinctes, alors leur **somme** est égale à $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ et leur **produit** est égal à $\dfrac{c}{a}$.

A19 Démontrer les formules de la somme et du produit des racines.

A20 Justifier que 2 est une racine de $x^2+\left(\sqrt{3}-2\right)x-2\sqrt{3}$, déterminer astucieusement l'autre racine.

A21 On considère un rectangle de périmètre 20 et d'aire 21 : quelle est la largeur et quelle est la longueur de ce rectangle ?

A22 Pour tout réel x, on pose : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, $a<0$

1. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, montrer que : $f(u)-f(v)=a(u-v)(u+v-2\alpha)$.
2. On suppose que : $u<v\leqslant\alpha$, montrer que $f(u)<f(v)$: que peut-on en déduire pour le sens de variation de f sur $]-\infty;\alpha]$?
3. On suppose que : $\alpha\leqslant u<v$, montrer que $f(u)>f(v)$: que peut-on en déduire pour le sens de variation de f sur $[\alpha;+\infty[$?

$\boxed{P}$ **sens de variation de $f : x\mapsto ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$**

Pour tout réel x : $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, posons $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$:

• si $a>0$, alors $f\searrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ et $f\nearrow$ sur $[\alpha;\ +\infty[$.

• si $a<0$, alors $f\nearrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ et $f\searrow$ sur $[\alpha;\ +\infty[$.

$\boxed{D}$ On appelle **parabole** la représentation graphique d'une fonction du second degré dans n'importe quel repère **orthogonal** du plan et on appelle sommet le cette parabole le point $\boldsymbol{S}(\alpha\,;\beta)$.

$\boxed{i}$ Lorsque $a<0$, on parle parfois de parabole « pas sourire » et S est le point « le plus haut » de la parabole.
Lorsque $a>0$, on parle parfois de parabole « sourire » et S est le point « le plus bas » de la parabole.

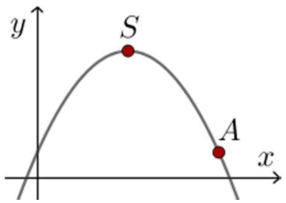
A23 Dresser le tableau de variation de f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=-x^2+4x-1$ et $g(x)=(2x-3)(x-5)$.

A24 On veut construire un potager de forme rectangulaire et le clôturer sur ses quatre côtés : on dispose de matériaux permettant de construire 20 mètres de clôture.
Quelles doivent être les dimensions du potager si l'on souhaite que son aire soit maximale ?

$\boxed{P}$ **axe de symétrie dans un repère orthogonal (admis)**
Dans un repère orthogonal la parabole représentative de la fonction du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, est symétrique par rapport à la droite « verticale » d'équation $x = \alpha$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
$\boxed{i}$ un repère orthonormé est un cas particulier de repère orthogonal : la propriété de symétrie s'y applique.
Mais dans un repère non orthogonal la courbe représentative de f n'a pas d'axe de symétrie.

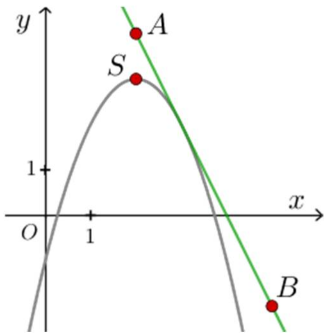
A25 Dans un repère orthogonal, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f définie par $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$: préciser l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

R01 Dans un repère orthogonal on donne la parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, on a placé le sommet $S(2\,;5)$ de $\mathcal{P}$ et $A(4\,;1)$ appartenant à $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses du repère.



R02 La parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ coupe l'axe des abscisses aux valeurs (-1) et 3 et passe par le point $A(5\,;6)$: déterminer a, b et c et dresser le tableau de variation de f.

R03 Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, on note S le sommet de $\mathcal{P}$ et on considère les points $A(2\,;4)$ et $B(5\,;\,-2)$ non situés sur $\mathcal{P}$.



1. Donner la forme canonique de $f(x)$, en déduire les coordonnées de S.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
3. Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et (AB).