F Identités (ou égalités) remarquables Pour tous réels a et b :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

A01 • Développer :

$A(x) = (3x-2)^2$ $B(x) = 2(-x+1)^2$ $C(x) = -(x-7)^2$

• Factoriser :

$D(x) = 4x^2 - 5$ $E(x) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}$ $F(x) = -x^2 + 10x - 25$

D • f définie sur $\mathbb{R}$ est un **polynôme du second degré** lorsqu'il existe trois réels a, b et c avec $a \neq 0$, tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

i On dit aussi que f est une **fonction polynôme du second degré**.

• toute expression de forme développée $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une **expression du second degré**.

A02 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x(x-1)^2 - x^3 + 4$: montrer que f est un polynôme du second degré.

D La **forme canonique** de l'expression du second degré $ax^2 + bx + c$ s'écrit : $a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux constantes réelles à préciser.

A03 Déterminer la forme canonique de :

$E(x) = x^2 + 8x - 9$ $F(x) = x^2 - 6x + 10$ $G(x) = x^2 + 5x - 4$

A04 Donner la forme canonique de $G(x) = (x-1)(x+4)$.

A05 Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

F $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: la **forme canonique** de $f(x)$ s'écrit $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

A06 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 3x + 4$: donner la forme canonique de $f(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x(x-3) = 4$.

A07 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 7x + 6$: donner la forme canonique de $f(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 = 7x - 6$.

D **Factoriser** (dans $\mathbb{R}$) $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, lorsque cela est possible, c'est l'écrire comme produit de facteurs constants ou de degré 1.

A08 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 4x^2 - 36x$ et $B(x) = -x^2 + 25x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = 6x^2 - 2x + 4$: peut-on dire que $C(x) = 2(3x^2 - x + 2)$ est une factorisation valide de l'expression du second degré $C(x)$?

F Pour factoriser $\boldsymbol{ax^2 + bx}$ avec $a \neq 0$, il suffit de mettre x en facteur.

i c'est logique : x apparaît « partout » donc il peut être mis en facteur.

F Pour factoriser $\boldsymbol{ax^2 + c}$ avec $a \neq 0$ on cherche à se ramener à la forme $(\dots)^2 - (\dots)^2$ qui se factorise : $(A)^2 - (B)^2 = (A+B)(A-B)$.

Mais si l'on obtient « $(A)^2 + k^2$ » ou « $-(A)^2 - k^2$ » avec $k \neq 0$ alors l'expression de départ n'est pas factorisable (dans $\mathbb{R}$).

A09 Factoriser dans $\mathbb{R}$ ou bien justifier que cela n'est pas possible :

$E(x) = x^2 - 25$ $E(x) = 3x^2 - 5$ $F(x) = -x^2 + 7$

$G(x) = x^2 + 4$ $H(x) = -25x^2 + 4$ $I(x) = -x^2 - 9$

A10 Factoriser dans $\mathbb{R}$ ou justifier que cela n'est pas possible :

$A(x) = x^2 + 49$ $B(x) = -36x^2 + 1$ $C(x) = -x^2 - 3$ $D(x) = 7x^2 - 4$

$\boxed{F}$ **factorisation de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$**

a, b et c sont trois constantes avec $a \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **discriminant** le nombre réel : $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Trois cas peuvent se présenter :

• si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

• si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ n'est pas factorisable (dans $\mathbb{R}$).

A11 Démontrer la propriété de factorisation de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

A12 Lorsque que cela est possible, factoriser dans $\mathbb{R}$ l'expression :

$A(x) = 3x^2 + x - 4 \qquad B(x) = 4x^2 - 12x + 9 \qquad C(x) = x^2 + 2x + 5$

A13 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $X^2 - 5X - 36$, puis $x^4 - 5x^2 - 36$.

$\boxed{D}$ Une **racine** de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

$\boxed{F}$ **$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$**

On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax^2 + bx + c = \mathbf{0}$, avec $a \neq 0$.

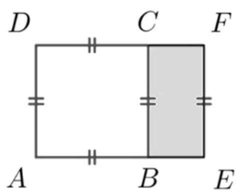
• Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet **deux solutions réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet **une unique solution** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

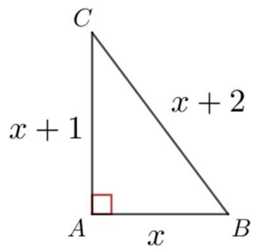
A14 Un studio d'aire $24\ m^2$ est constitué d'une pièce à vivre qui est un carré $ABCD$ et d'une cuisine qui est un rectangle $BEFC$ avec $BE = 2\ m$.
Déterminer la longueur AE et la largeur AD de ce studio.



A15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x(3x - 1) = 10$ et $x^2 - 3x\sqrt{3} = 12$.

A16 Une unité de distance étant choisie on considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = x$, $AC = x + 1$ et $BC = x + 2$.

Calculer x puis déterminer l'aire de ce triangle.



A17 On considère une expression $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admettant deux racines réelles distinctes : démontrer que la somme des racines est égale à $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ et que leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$.

A18 On considère un rectangle de périmètre 20 et d'aire 21.
Quelles sont les longueur et largeur de ce rectangle ?

$\boxed{P}$ **sens de variation de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ (admis)**

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$:

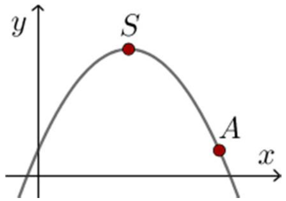
• si $a > 0$, alors $f \searrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ et $f \nearrow$ sur $[\alpha;\ +\infty[$ (« sourire »)

• si $a < 0$, alors $f \nearrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha;\ +\infty[$ (« pas sourire »)

$\boxed{D}$ On appelle **parabole** la représentation graphique d'un polynôme du second degré dans un repère **orthogonal**, le point $\boldsymbol{S}(\alpha\,;\beta)$ est le **sommet** de cette parabole.

$\boxed{i}$ Le sommet est le point le plus haut ($a < 0$) ou bien le plus bas ($a > 0$).

A19 Dans un repère orthogonal on donne ci-contre la parabole $\mathcal{P}$ représentative d'une fonction polynôme du second degré f : on a placé le sommet $S(2\,;5)$ ainsi que le point $A(4\,;1)$ appartenant à $\mathcal{P}$.



1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$ puis calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses du repère.
2. Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de $f(x)$.

$\boxed{P}$ axe de symétrie dans un repère orthogonal (admis)

Dans un rep. orthogonal la parabole représentative de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est symétrique par rapport à la droite « verticale » d'équation $x = \alpha$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, droite qui passe par le sommet de la parabole.

A20 Dans un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 3x - 1$: préciser l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

tableau de signes de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

• si $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admet deux racines réelles distinctes alors on utilise la règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'**extérieur** de ses racines et du signe contraire entre ses racines ».

• si $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admet une seule racine alors on utilise la règle : « $ax^2 + bx + c$ est **partout** du signe de a et s'annule une fois »

• si $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ n'admet aucune racine réelle, alors on utilise la règle : « $ax^2 + bx + c$ est **partout** du signe de a et ne s'annule pas ».

A21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x - 1)(x + 2) \geqslant 3$.

A22 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x - 5}{-x^2 + 3x + 4} \leqslant 0$$

A23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x - 5)(-x + 7) > -x + 1$.

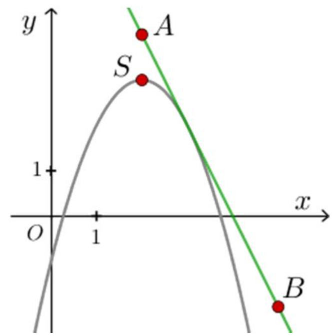
A24 On veut construire un potager de forme rectangulaire et le clôturer sur ses quatre côtés : on dispose de matériaux permettant de construire 20 mètres de clôture. Quelles doivent être les dimensions du potager si l'on veut rendre maximale son aire ?

A25 La parabole $\mathcal{P}$ représentative d'une certaine fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal coupe l'axe des abscisses aux valeurs (-1) et 3, et elle passe par le point $A(5\,;6)$.
Déterminer le tableau de variation de f et préciser l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

A26 Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 1$$

S est le sommet de $\mathcal{P}$, A et B sont deux points du plan tels que $A(2\,;4)$ et $B(5\,;\,-2)$.



1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$, en déduire les coordonnées de S.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) puis étudier son intersection avec $\mathcal{P}$.

A27 m est un paramètre réel, on considère l'équation (E_m) d'inconnue réelle x : $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$.

1. On suppose $m = -1$: l'équation $E_{(-1)}$ admet-elle une solution réelle ?
2. Discuter, suivant les valeurs de m, de l'existence et du nombre de solution de l'équation (E_m).

A28 Une parabole $\mathcal{P}$ passe par $A(-2\,;3)$, $B(1\,;6)$ et $C(2\,;11)$ et représente $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal.
Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{P}$?