Première **05. Fonction exponentielle** **ACTIVITÉS**

$\boxed{P1}$ (admise)
Si f est dérivables sur $\mathbb{R}$, alors pour toutes constantes a et b, la fonction $g: x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

$\boxed{P2}$ (admise)
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f'(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$.

☐ **A01** On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa fonction dérivée et prenant la valeur 1 en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = f(x) \times f(-x)$
- **a.** Démontrer que, pour tout réel x on a : $p'(x) = 0$.
- **b.** Soit x un réel quelconque. Montrer que : $f(x) \times f(-x) = 1$, puis que : $f(x) \neq 0$ et enfin que : $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g'(x) = g(x) \text{ et } g(0) = 1$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$.
En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

$\boxed{D}$ L'unique fonction f égale à sa fonction dérivée et prenant la valeur 1 en 0 s'appelle « **fonction exponentielle** » et se note provisoirement exp.
On a : $\exp(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

$\boxed{P}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ autrement dit le résultat de $\exp(x)$ ne vaut jamais zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

☐ **A02** Soit b une constante, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(x)}$$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0$, en déduire que pour tout réel x, on a : $\exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$.
Écrire l'égalité précédente en remplaçant b par y.

2. Montrer que pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$\boxed{F}$ Pour tous réels x et y, on a :

$$\mathbf{exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)} \text{ et } \mathbf{exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}}$$

☐ **A03** Démontrer que, pour tout réel x :

$$\exp(2x) = (\exp(x))^2 \text{ et } \exp(3x) = (\exp(x))^3$$

$\boxed{F}$ Pour tout réel x et tout entier naturel n :

$$\exp(2x) = (\exp(x))^2,\ \exp(3x) = (\exp(x))^3 \text{ et } \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

☐ **A04** Démontrer que pour tout réel x, on a : $\exp(x) > 0$.

$\boxed{F}$ Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

C'est le « résultat » de $\exp(x)$ qui est toujours strictement positif et non x qui, lui, est un réel quelconque.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

☐ **A05** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

$\boxed{D}$ Le **nombre d'Euler e** est l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$e = \exp(1) \text{ et } e \approx 2{,}718$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$.
On peut démontrer que cette formule est encore vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.
On admettra que l'on peut poser : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $(e^x)' = e^x$ • $e^x > 0$
- $e^{2x} = (e^x)^2$ • $e^{nx} = (e^x)^n$ • $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$ • $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ • $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$
- $e^0 = 1$ • $e^1 = e \approx 2,718$ • $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

☐ **A06** x est un réel quelconque, simplifier :

$A = e^2 \times e^{-1}$ $B = \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3 \times e^{-1}$ $C = \sqrt{e} \times e^{\frac{3}{2}}$ $D = \dfrac{e^{-3} \times e}{e^{-7}}$

$E = \sqrt{e^{2x}}$ $F = e^{x-1} \times e^x$ $G = \dfrac{e^{4x-1}}{e^{x-3}}$ $H = \dfrac{e^{2x-3} \times e^{-3x+4}}{e^{-x+1}}$

$\boxed{P}$ Soient a et b deux constantes réelles, alors $g : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a\, e^{ax+b}$.

$\boxed{F}$ On pourra retenir les formules :

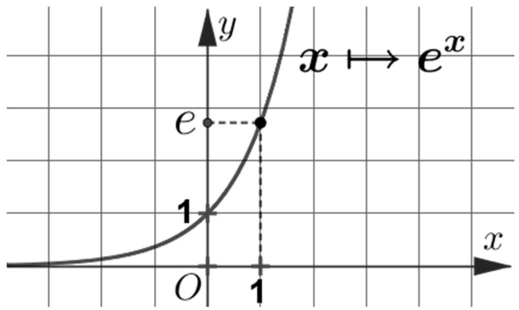
$$\left(e^{ax+b}\right)' = a \times e^{ax+b} \quad \text{et} \quad (e^{-x})' = -\, e^{-x}$$

$\boxed{i}$ (hors programme)
Plus généralement, pour toute fonction u dérivable sur un intervalle, la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur cet intervalle et $(e^u)' = u' \times e^u$.

☐ **A07** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

$\boxed{P}$ La fonction exponentielle et **strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.
Dans un repère orthogonal, sa **courbe représentative est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses** :



☐ **A08** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x+1}$, $g(x) = e^{0,5x}$ et $h(x) = e^{-2x+5}$.
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

☐ **A09** Pour tout réel x, $f(x) = xe^x + 1$.
Calculer $f'(x)$, donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle, dresser le tableau de variation de f.

☐ **A10** Pour tout réel x, $f(x) = x^2 e^x$.
Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.

☐ **A11** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^{-x}$. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

☐ **A12** Démonstration de : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$\boxed{Rappel}$ Soit f strictement croissante sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in I$.
Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$; si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$.

$\boxed{Rappel}$ $x = y \Leftrightarrow x \leqslant y$ et $x \geqslant y$

1. Justifier brièvement que : si $a = b$ alors $e^a = e^b$.
2. Soient a et b deux réels tels que $e^a = e^b$.
   a. On suppose que $a < b$.
   Montrer que l'on obtient une contradiction avec $e^a = e^b$.
   Il faut donc rejeter la supposition « $a < b$ » donc que $a \geqslant b$.
   b. Démontrer de même que $a \leqslant b$.
   c. Déduire de **a.** et **b.** que : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Bilan On vient de démontrer que : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

☐ **A13** Soient a et b deux réels, démontrer que l'on a l'équivalence :

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$\boxed{F}$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ on a les équivalences :

• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

• $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ • $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

• $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$ • $e^a \geqslant e^b \Leftrightarrow a \geqslant b$

☐ **A14** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

• $e^{x+3} = 1$ • $e^x \times e^{4x+1} = e$ • $e^{-x} = -3$ • $e^{2x} + 1 = 2e^x$

☐ **A15** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x(e^x + 4) = 5$.

☐ **A16** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

• $e^x - 2xe^x = 0$ • $xe^x - e^{x+1} = 0$ • $e^x(e^x + 2) = \frac{1+2e}{e^2}$

☐ **A17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : • $e^{-x+2} < e^x$ • $e^{x-3} \geqslant 1$

$\boxed{M}$ Pour dresser le tableau de signes d'une expression avec intervention d'une exponentielle :
– si le signe est évident alors on le justifie
– sinon on cherche pour quelles valeurs de x l'expression est strictement positive : cela donnera la « case contenant le signe + » dans le tableau de signes à construire

☐ **A18** Dresser le tableau de signes de :

$A(x) = e^{-x} + 5$ $B(x) = -e^x - 2$ $C(x) = e^{3x} - e^x$

☐ **A19** Dresser le tableau de signes de $B(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$.

☐ **A20** Pour tout réel x, on pose $f(x) = xe^x + ax + 1$ où a est une constante réelle provisoirement inconnue. Déterminer a sachant que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle admet pour coefficient directeur 4.

☐ **A21** On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.

☐ **A22** Pour tout réel x on pose : $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = e^{3x}$.
Étudier les positions relatives de leurs courbes représentatives.

$\boxed{P}$ Pour a réel fixé, la suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{an}$ est géométrique de raison e^a.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »