Exemple $n°1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u(n) = \sqrt{2n+3}$; on a :

• $u(0) = \sqrt{2(0)+3} = \sqrt{3}$, on écrit : $u_0 = \sqrt{3}$, le **terme** u_0 a pour **indice** l'entier naturel 0 et il a pour valeur $\sqrt{3}$, c'est le **terme initial** de la **suite** (u_n),

• $u(10) = \sqrt{2(10)+3} = \sqrt{23}$, on écrit : $u_{10} = \sqrt{23}$, u_{10} est le terme d'indice l'entier naturel 10 et il a pour valeur $\sqrt{23}$.

Dans cet exemple il est possible de calculer directement un terme dont l'indice est connu : la suite est donnée de **manière explicite**, par une **formule explicite**.

$\boxed{D}$ Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^* = \{1; \dots;\}$ vers $\mathbb{R}$ autrement dit c'est une fonction dont la variable est un entier naturel.
Certes, l'indice d'un terme est nécessairement un entier naturel, mais la valeur de ce terme est « rarement » un entier naturel.

Exemple $n°2$

On pose : $v_0 = 0{,}25$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$;

• pour $n = 0$ on obtient : $v_1 = 2v_0 + 1 = 2(0{,}25) + 1 = 1{,}5$

• pour $n = 1$ onobtient $v_2 = 2v_1 + 1 = 2(1{,}5) + 1 = 4$

• pour $n = 2$ on obtient $v_3 = 2v_2 + 1 = 2(4) + 1 = 9$ etc.

On peut calculer « de proche en proche » les termes de la suite : elle est donnée par **récurrence** en donnant son premier terme et une relation de récurrence.

$\boxed{D}$ **Sens de variation d'une suite**

• (u_n) est **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$

• (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant u_{n+1}$

Les termes d'une suite croissante vont en augmentant, ceux d'une suite décroissante vont en diminuant.

Certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes, certaines sont **croissantes (décroissante) à partir d'un certain rang n_0**.

$\boxed{P}$ **sens de variation par le signe de la différence**

(u_n) est **croissante** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ **est positif ou nul**

(u_n) est **décroissante** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ **est négatif ou nul**

A01 Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 + 3$ et $v_n = \frac{1}{n+2} + 5$.

A02 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$

• démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)}$$

• en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$\boxed{P}$ Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$:

• $f \nearrow$ sur $[0\,;\,+\infty[$ ***alors*** $(u_n) \nearrow$ • $f \searrow$ sur $[0\,;\,+\infty[$ ***alors*** $(u_n) \searrow$

attention : la réciproque est fausse

A03 Déterminer de deux façons différentes le sens de variation de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

$\boxed{D}$ Une suite est **arithmétique** de **raison r** $\in \mathbb{R}$ lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** la **constante** r :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

$\boxed{D}$ Une suite est **géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{R}$ lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par la constante q :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

La raison d'une suite arithmétique ou géométrique ne dépend pas de la variable n : c'est une constante.

$\boxed{i}$ Si $r = 0$ lors la suite arithmétique est constante, si $q = 1$ alors la suite géométrique est constante. Déterminer « la nature d'une suite », c'est dire si elle est arithmétique, ou géométrique, ou ni l'un ni l'autre.

$\boxed{P}$ • une suite (u_n) est **arithmétique** de raison r lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

(on dit que la **différence entre deux termes consécutifs est constante**)

• conséquence : une suite arithmétique de raison r est
– strictement croissante lorsque r est strictement positif $(r > 0)$,
– constante lorsque r est nul $(r = 0)$,
– strictement décroissante lorsque r est strictement négatif $(r < 0)$.

• une suite (u_n) dont tous les termes sont non nuls est **géométrique** de raison q lorsque, pour tout entier naturel n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

(on dit que le **quotient de deux termes consécutifs est constant**)

$\boxed{M}$ Pour démontrer qu'une suite (u_n) :

• est arithmétique : on montre que $u_{n+1} - u_n =$ constante $(= r)$

• n'est pas arithmétique : on constate que $u_1 - u_0$ est différent de $u_2 - u_1$

• est géométrique : on montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ constante $(= q)$

• n'est pas géométrique : on constate que $\frac{u_1}{u_0}$ est différent de $\frac{u_2}{u_1}$

A04 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 7$, déterminer la nature de la suite (u_n).

A05 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times 2^n$, déterminer la nature de la suite (u_n).

A06 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 1$, déterminer la nature de la suite (u_n).

A07 **a.** (u_n) arithmétique, $u_0 = 5$ et $r = 3$. Écrire un programme Python qui demande d'entrer n puis calcule et affiche u_n.
b. (v_n) géométrique, $v_1 = 5$ et $q = 2$. Écrire un programme Python qui demande d'entrer n puis calcule et affiche v_n.

$\boxed{F}$ (u_n) est suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p entiers on a : $u_n = u_p + (n - p) \times r$. En particulier :

$$u_n = u_0 + n \times r \text{ et } u_n = u_1 + (n - 1) \times r.$$

$\boxed{i}$ En appliquant ces formules on obtient la forme explicite de u_n.

A08 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $u_3 = 10$ et $u_5 = 14$. Déterminer l'entier naturel p tel que : $u_p = 86$.

$\boxed{F}$ (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$. En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

$\boxed{i}$ En appliquant ces formules on obtient la forme explicite de u_n.

A09 On pose $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 40$.

1. Déterminer la nature de la suite (u_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Démontrer que (u_n) est (strict.) croissante et est majorée par 200.

$\boxed{P}$ On relève « quelque chose » périodiquement et on note u_n sa valeur au bout de n périodes de temps, alors :

- la suite (u_n) est **arithmétique** lorsque les variations de cette chose se font à **valeur constante** c et on a alors $\mathrm{r} = \mathrm{c}$
- la suite (u_n) est **géométrique** lorsque les variations de cette chose se font à **pourcentage constant** $t\%$ et on a alors $q = 1 + \dfrac{t}{100}$
  t étant positif/négatif suivant que l'on a une hausse/baisse.

Exemple

- pour une **hausse** de 5% on a une **variation** de $(+5\%)$ donc :

$$q = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$$

la suite est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

- pour une **baisse** de 20% on a une **variation** de (-20%) et on a alors :

$$q = 1 + \frac{-20}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$$

la suite est géométrique de raison $q = 0{,}8$.

$\boxed{F}$ Dans « $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ » : il y a $(n - p + 1)$ termes ajoutés.

On retiendra : nombre de termes ajoutés $=$ différence des indices extrêmes $+ 1$

A10 Déterminer le nombre de termes ajoutés dans chacune des sommes :

$A = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 + u_{10}$ $\quad B = u_5 + u_6 + \cdots + u_{14} + u_{15}$

$C = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $\quad D = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

$\boxed{F}$ Si (u_n) est une suite arithmétique, alors :

$$u_0 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$$

On retiendra :

$$\frac{(\text{premier} + \text{dernier terme de la somme}) \times \text{nombre de termes ajoutés}}{2}$$

A11 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0{,}25$; calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

$\boxed{P}$ Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On retiendra :

$$\text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1 - q}$$

A12 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$; calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

A13 La tour de Hanoï …

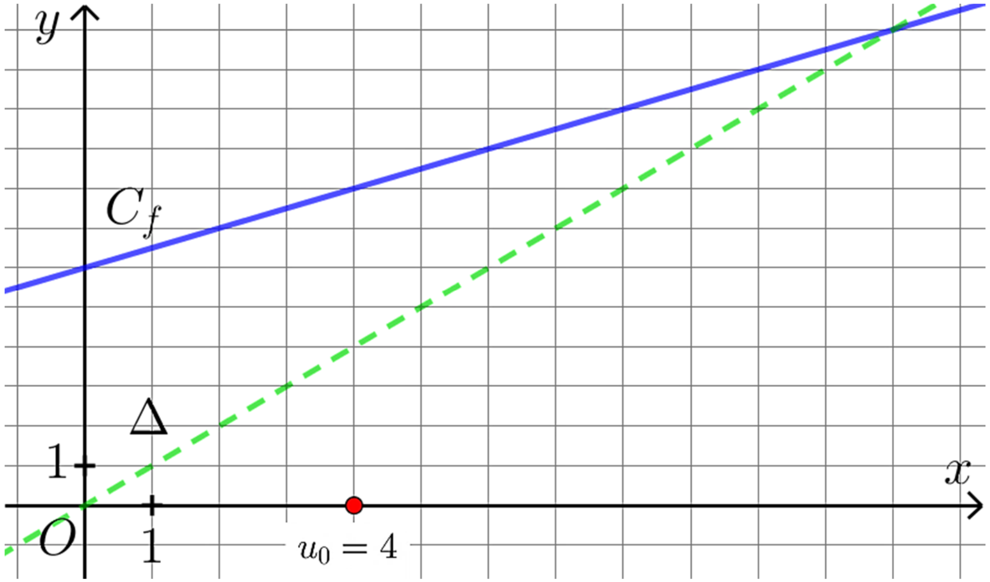
Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = u_n + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, en déduire u_{76}.

A14 $u_0 = 80$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 40$.

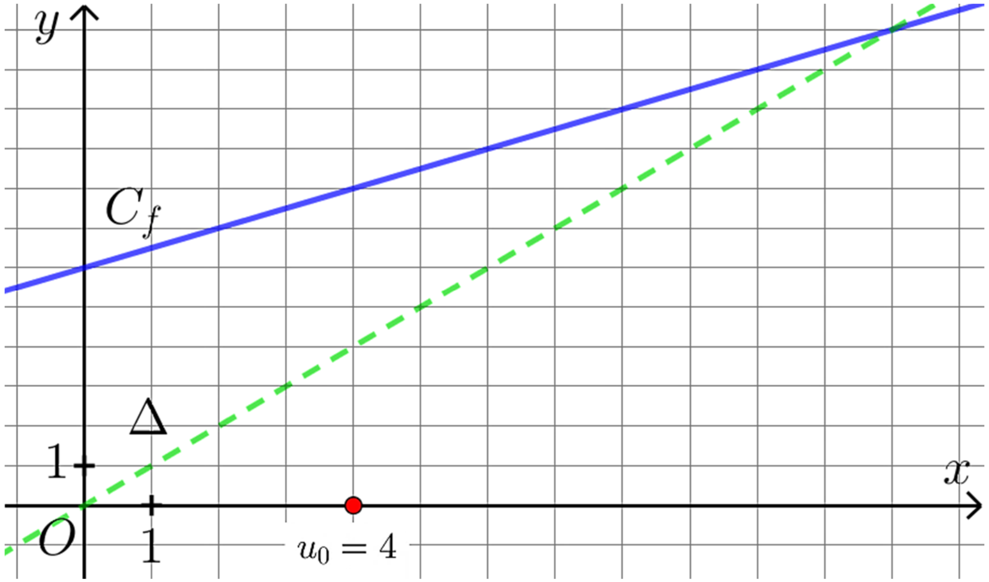
1. Écrire un programme Python qui demande d'entrer n puis affiche la valeur de u_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 160$.
   a. Montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n < 160$.

A15 $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6$; on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 6$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$:



1. Visualiser u_1,u_2, u_3 sur l'axe des abscisses du repère et donner leurs valeurs par lecture graphique ; vérifier par le calcul.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 12$.
   - **a.** Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n, en déduire que (u_n) est strictement croissante et que pour tout entier naturel n : $u_n < 12$.
4. Écrire un programme Python qui affiche le plus petit entier n_0 pour lequel $u_{n_0} > 11{,}999$.

A15 $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6$; on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 6$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$:



1. Visualiser u_1,u_2, u_3 sur l'axe des abscisses du repère et donner leurs valeurs par lecture graphique ; vérifier par le calcul.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 12$.
   - **a.** Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n, en déduire que (u_n) est strictement croissante et que pour tout entier naturel n : $u_n < 12$.
4. Écrire un programme Python qui affiche le plus petit entier n_0 pour lequel $u_{n_0} > 11{,}999$.