$\boxed{D}$ Soit a appartenant à $\mathcal{D}_f$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in \mathcal{D}_f$ on appelle **taux d'accroissement de f** entre a et $a+h$ le nombre réel :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A01 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

1. Montrer que, pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est égal à : $2h+3$.
2. On obtient facilement le tableau de valeurs :

h	1	0,5	0,1	0,005	0,000 1
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$	5	4	3,2	3,01	3,000 2

De quel nombre semble « se rapprocher de plus en plus » le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ lorsque l'on fait « tendre h vers zéro ». On dit que : f est dérivable en $a=1$ et que le nombre dérivé de f en 1 est égal à 3 et on écrit $f'(1)=3$.

A02 Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 5x$: vérifier que le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est égal à $h+9$, en déduire $f'(2)$.

$\boxed{D}$ Soit f définie en $\boldsymbol{a}$ et un peu autour. Lorsqu'il existe, le **nombre dérivé** de f en $\boldsymbol{a}$ est la limite du taux d'accroissement de f entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}+h$ lorsque l'on fait tendre h tend vers zéro et on le note $f'(\boldsymbol{a})$:

$$\underbrace{f'(\boldsymbol{a})}_{\substack{\text{nombre dérivé} \\ \text{de } f \text{ en } a}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h)-f(\boldsymbol{a})}{h}$$

Soit $A(a; f(a)) \in \mathcal{C}_f$: la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(\boldsymbol{a})$ s'appelle la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en A.

$\boxed{F}$ $f'(a)$ = coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a\,;\ldots) \in \mathcal{C}_f$

$\boxed{F}$ si A et B sont deux points distincts d'une droite non verticale, alors le coefficient directeur de cette droite est :

$$\boxed{a_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

$\boxed{F}$ La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\boldsymbol{a}$ admet pour équation : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.
(*en développant on obtient l'équation réduite de la tangente*)

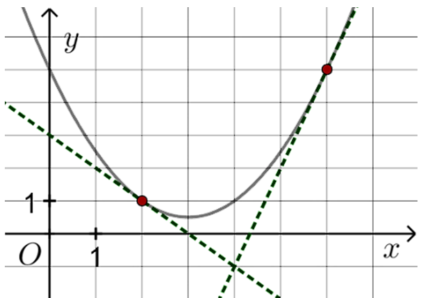
$\boxed{M}$ Pour obtenir par lecture graphique $f'(\boldsymbol{a})$:
– on se place sur le point de la courbe de f d'abscisse $\boldsymbol{a}$
– par lecture graphique on détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en ce point, il est égal à $f'(\boldsymbol{a})$

A05 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x - 5$: déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis vérifier avec la calculatrice.

A06 On donne la représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$$

ainsi que les tangentes en deux points à coordonnées entières.

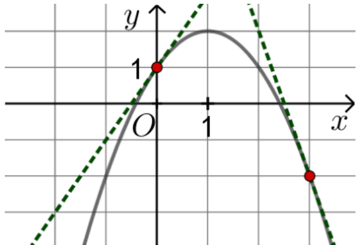


1. Par lecture graphique, déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(6)$ et $f'(6)$.

A07 On donne la représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

ainsi que les tangentes à cette courbe en deux points à coordonnées entières.



1. Par lecture graphique, déterminer $f(3)$ et $f'(3)$.
2. On admet que la tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses (« tangente horizontale ») : que vaut $f'(1)$?
   Retrouver ce résultat par le calcul.
3. Par lecture graphique dresser le tableau de variation de f et le tableau de signes de $f'(a)$ suivant les valeurs de a.

A08 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 10x + 3$: démontrer que : $f'(a) = 2a - 10$.
Déterminer en quel(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ la tangente est horizontale.

$\boxed{D}$ Lorsque le nombre dérivé de f en a existe on dit que f est **dérivable en a** et Lorsque f est dérivable en tout nombre d'un intervalle donné alors on dit que f est **dérivable sur cet intervalle**.

A09 démonstration du cours **[dérivée de la fonction carré]**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = x^2$: démontrer que f est dérivable en tout réel a et donner $f'(a)$.

A10 démonstration du cours **[dérivée de la fonction cube]**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = x^3$: démontrer que f est dérivable en tout réel a et donner $f'(a)$.

$\boxed{D}$ La fonction qui, à tout nombre a associe le nombre dérivé de f en a est la **fonction dérivée** de f, notée f'.
On dit que la dérivée de l'expression $f(x)$ est l'expression $f'(x)$.

$\boxed{F}$

- **si $f(x) = x^2$** **alors $f'(x) = 2x$** $\mathbb{R}$
- **si $f(x) = x^3$** **alors $f'(x) = 3x^2$** $\mathbb{R}$

A11 démonstration du cours **[dérivée d'une fonction affine]**

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = mx + p$: démontrer que f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et donner $f'(a)$, en déduire l'expression $f'(x)$.
2. Soient a et b deux constantes : à l'aide de **1.**, donner sans justification $(ax+b)'$, en déduire $(x)'$ et $(b)'$.

$\boxed{F}$

- **si $f(x) = ax + b$** **alors $f'(x) = a$** $\mathbb{R}$
- **si $f(x) = x$** **alors $f'(x) = 1$** $\mathbb{R}$
- **si $f(x) = b$** **alors $f'(x) = 0$** $\mathbb{R}$

A12 démonstration du cours **[dérivée de la fonction inverse]**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$: démontrer que f est dérivable en $a \neq 0$ et donner $f'(a)$, en déduire $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

A13 démonstration du cours **[dérivée de la fonction racine carrée]**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que, pour $a \geqslant 0$ et h réel non nul tel que $a + h \geqslant 0$:
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$
2. En déduire que :
   - f est dérivable en $a > 0$ et donner $f'(a)$
   - f n'est pas dérivable en $a = 0$

formules

si $f(x)=\dfrac{1}{x}$	**alors** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[,\ ]0;+\infty[$
Si $f(x)=\sqrt{x}$	**alors** $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
Si $f(x)=x^n$	**alors** $f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$

Formule

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k une constante, alors les fonctions $u+v$, $u-v$ et $k\times u$ sont dérivables sur I et on a : $(u+v)'=u'+v'$, $(u-v)'=u'-v'$, $(k\times u)'=k\times u'$.

Théorème fondamental (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle :

- si f' est **positive** sur cet intervalle, alors f est ↗ sur cet intervalle
- si f' est **négative** sur cet intervalle, alors f est ↘ sur cet intervalle
- si f' est **nulle** sur cet intervalle, alors f est constante sur cet intervalle.

A14 Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser la tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=x^3+x^2-8x+1$ **2.** $f(x)=(x-3)(x^2-3)+1$

A15 démonstration du cours **[dérivée de $u\times v$]**

u et v définies sur un intervalle I contenant a, dérivables en a, on pose : $\forall x\in I, f(x)=u(x)\times v(x)$.
En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que :

$$f'(a)=u'(a)\times v(a)+v'(a)\times u(a)$$

formule

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $u\times v$ est dérivables sur I et on a : $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$.
On peut aussi écrire : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$.

A16 Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=(2x+5)(3x-1)$ **2.** $f(x)=(x^2+1)(-x+2)$

A17 démonstration du cours **[dérivée de u^n]**

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, déterminer $(u^2)'$ et $(u^3)'$.

formules : dérivée d'une puissance

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors u^2, u^3, …, u^n, $n\in\mathbb{N}^*$ sont dérivables sur I et on a :
$\boldsymbol{(u^2)'=2u\times u'}$; $\boldsymbol{(u^3)'=3u^2\times u'}$; $\boldsymbol{(u^n)'=nu^{n-1}\times u'}$ $\boldsymbol{(admise)}$

A18 Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=(x^2+4x-5)^2$ **2.** $f(x)=(-x+5)^3$

A19 démonstration du cours **[dérivée de l'inverse d'une fonction]**

Soit v dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle, on pose pour tout $x\in I$:

$$f(x)=\frac{1}{v(x)}$$

Démontrer que, pour $a\in I$ et $h\neq 0$ tel que $a+h\in I$, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\frac{1}{v(a+h)\times v(a)}$$

En déduire que f est dérivable en a et donner $f'(a)$.

formule : dérivé de l'inverse d'une fonction

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle, alors fonction $\frac{1}{v} : x \in I \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

formule : dérivé d'un quotient

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur cet intervalle, alors fonction $\frac{u}{v} : x \in I \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ , ou encore : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

A20 démonstration du cours

Démontrer l'une des deux formules équivalentes donnant la dérivée de $\frac{u}{v}$.

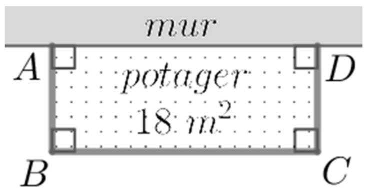
A21 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

1. $f(x) = \frac{1}{7x+1}$ **2.** $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ **3.** $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5}$

4. $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$ **5.** $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$ **6.** $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

A22 [recherche, grand classique]

On veut construire, le long d'un mur, un potager d'aire $18\ m^2$ et de forme rectangulaire puis le clôturer sur ses trois côtés restés libres.



Déterminer les dimensions exactes de ce potager pour que la longueur de clôture nécessaire soit minimale.

formule : dérivé de l'inverse d'une fonction

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle, alors fonction $\frac{1}{v} : x \in I \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

formule : dérivé d'un quotient

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur cet intervalle, alors fonction $\frac{u}{v} : x \in I \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ , ou encore : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

A20 démonstration du cours

Démontrer l'une des deux formules équivalentes donnant la dérivée de $\frac{u}{v}$.

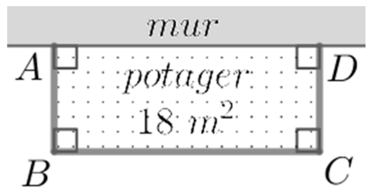
A21 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

1. $f(x) = \frac{1}{7x+1}$ **2.** $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ **3.** $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5}$

4. $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$ **5.** $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$ **6.** $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

A22 [recherche, grand classique]

On veut construire, le long d'un mur, un potager d'aire $18\ m^2$ et de forme rectangulaire puis le clôturer sur ses trois côtés restés libres.



Déterminer les dimensions exactes de ce potager pour que la longueur de clôture nécessaire soit minimale.