

**Exercice 1 [7 points]**

La parabole  $\mathcal{P}$  représentative d'une certaine fonction polynôme du second degré  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  admet pour sommet  $S(4 ; 1)$  et passe par  $A(6 ; -3)$ .

- déterminer la forme canonique de  $f(x)$

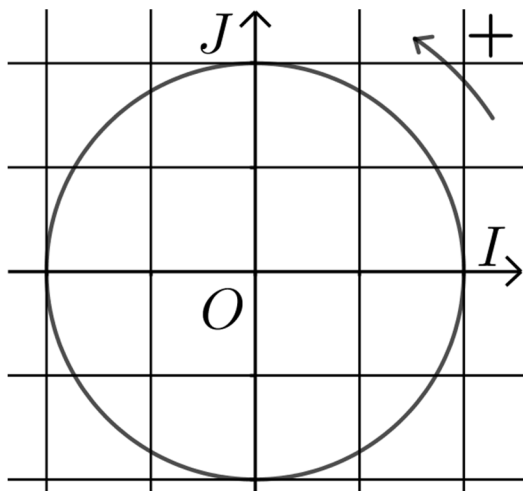
- vérifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

- la parabole  $\mathcal{P}$  coupe l'axe des abscisses en deux points : déterminer les abscisses de ces points.

**Exercice 2 [2 points]**

Placer sur le cercle trigonométrique le point  $A$  image de  $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

et le point  $B$  image de  $\frac{2\pi}{3}$  :



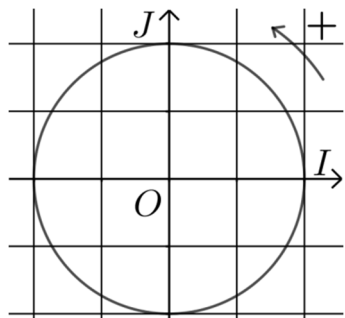
**Exercice 4 [7 points]**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$  :

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0$$

**Exercice 3 [4 points]**

Résoudre dans  $[0 ; 2\pi[$  l'équation :  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



## Corrigé

### Exercice 1

La parabole représentative d'une certaine fonction polynôme du second degré  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  admet pour sommet  $S(4 ; 1)$  et passe par  $A(6 ; -3)$ .

- **déterminer la forme canonique de  $f(x)$**

Le sommet  $S$  a pour coordonnées  $x_S = 4$  et  $y_S = 1$ , or avec les notations du cours  $S(\alpha ; \beta)$  donc :  $x_S = 4$  et  $y_S = 1$ .

Par ailleurs, la forme canonique s'écrit :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

Donc, pour tout réel  $x$  :  $f(x) = a(x - 4)^2 + 1$ .

Or, on sait que  $A(6 ; -3)$  appartient à la parabole représentative de  $f$  donc  $f(6) = -3$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} a(6 - 4)^2 + 1 &= -3 \Leftrightarrow a \times (2)^2 + 1 = -3 \\ \Leftrightarrow a \times 4 + 1 &= -3 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Finalement, la forme canonique de  $f(x)$  est :

$$f(x) = -(x - 4)^2 + 1$$

- **vérifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = -x^2 + 8x - 15$**

Développons la forme canonique de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 4)^2 + 1 \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 16 + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 15 \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout réel  $x$  :  $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ .

- **la parabole  $\mathcal{P}$  coupe l'axe des abscisses en deux points : déterminer les abscisses de ces points**

Les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  :

$-x^2 + 8x - 15 = 0$  est de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a = -1$ ,  $b = 8$  et  $c = -15$ , de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-15) = 64 - 60 = 4$$

$\Delta > 0$  donc il y a deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8 - 2}{-2} = \frac{-10}{-2} = +5 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8 + 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = +3 \end{aligned}$$

Les points d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : 3 et 5.

### Autre solution

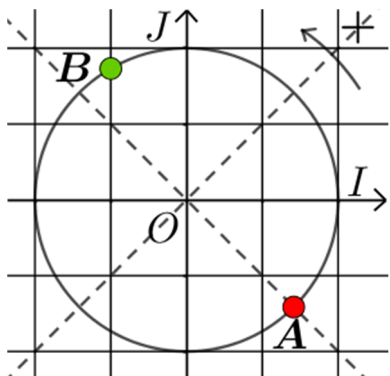
Les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ , qui s'écrit aussi, en utilisant la forme canonique de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} -(x - 4)^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^2 - (x - 4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow [1 + (x - 4)][1 - (x - 4)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + x - 4)(1 - x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(-x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } -x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } -x = -5 & \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5 & \end{aligned}$$

Les points d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : 3 et 5.

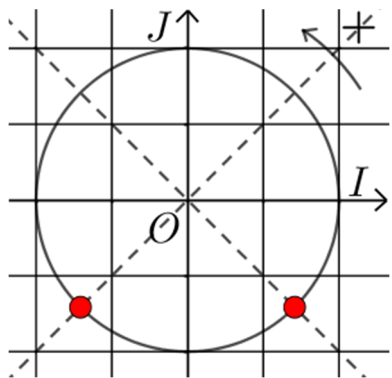
### Exercice 2

Placer sur le cercle trigonométrique le point  $A$  image de  $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  et le point  $B$  image de  $\frac{2\pi}{3}$ .



### Exercice 3

Résoudre dans  $[0 ; 2\pi[$  l'équation :  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



Il y a deux points sur le cercle trigonométrique ayant pour ordonnée  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Les réels de  $[0 ; 2\pi[$  ayant l'un de ces points pour image sont :  $\frac{5\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$

$$S_{[0;2\pi[} = \left\{ \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

### Exercice 4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0$ .

En posant  $X = \cos x$ , l'équation devient :  $2X^2 - 9X + 4 = 0$ , qui est de la forme  $aX^2 + bX + c = 0$  avec  $a = 2$ ,  $b = -9$  et  $c = 4$ , de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$\Delta > 0$  donc l'équation en  $X$  admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{9 - 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{9 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

On a donc :

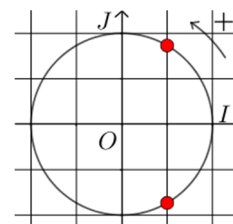
$$X = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

ou

$$X = 4$$

$$\cos x = 4$$



$$x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$$

ou

$$x = -\frac{\pi}{3} + k' \times 2\pi$$

Or, pour tout réel  $x$  :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

donc l'équation  $\cos x = 4$  est « impossible »

(elle n'admet pas de solution réelle).

$$\text{Finalement : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \right\}.$$