Maths 5^e 09. Parallélogramme

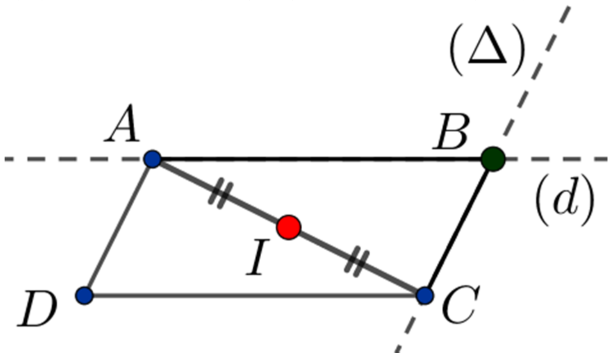
Définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. On a donc :

- si $ABCD$ est un parallélogramme alors $(AB) /\!/ (CD)$ **et** $(AD) /\!/ (BC)$
- si dans un quadrilatère $ABCD$ on a : $(AB) /\!/ (CD)$ **et** $(AD) /\!/ (BC)$ alors c'est un parallélogramme.

On peut raisonner sur les segments : $[AB] /\!/ [CD]$ **et** $[AD] /\!/ [BC]$.

A01 $ABCD$ parallélogramme, I le milieu de $[AC]$, s la symétrie centrale de centre I, (d) la droite (AB), (Δ) la droite (BC) :



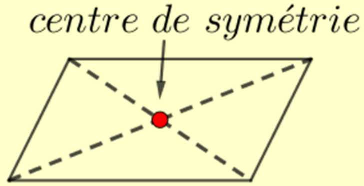
Rappel « par une symétrie centrale l'image d'une droite est une droite parallèle ».

- déterminer les images de A et C par s
- en déduire les images de (d) et (Δ) par s
- justifier que $s(B) = D$: que peut-on en déduire pour I ?

A02 $EFGH$ est un quadrilatère dont les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en leur milieu : montrer que $EFGH$est un parallélogramme.

Théorème fondamental

Tout parallélogramme admet un centre de symétrie qui est le point d'intersection de ses diagonales.



A03 Rappels : par une symétrie centrale :

P_1 : l'image d'un segment est un segment de même longueur

P_2 : l'image d'un angle est un angle de même mesure.

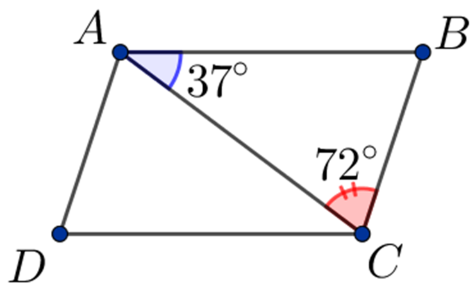
À l'aide des propriétés précédentes, démontrer que :

- « dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur »,
- « dans un parallélogramme les angles opposés ont la même mesure ».

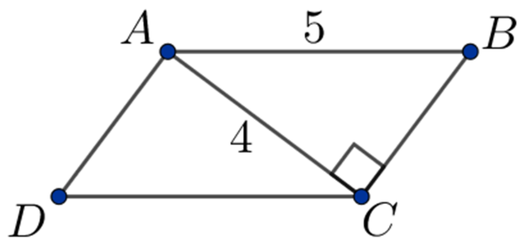
Propriétés

- « dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur »
- « dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu »
- « dans un parallélogramme les angles opposés ont la même mesure »

A04 Déterminer les mesures des angles du parallélogramme $ABCD$ sachant que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$ ont respectivement pour mesures 37° et 72° :



A05 $ABCD$ est un parallélogramme tel que : $AC = 4$, $AB = 5$ et $(AC) \perp (BC)$:

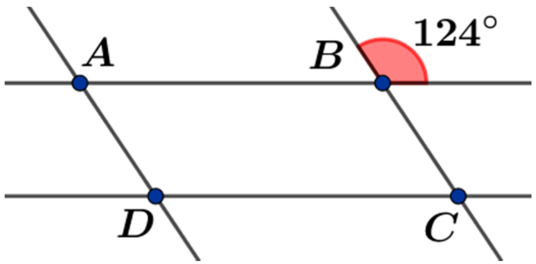


Déterminer l'aire de $ABCD$.

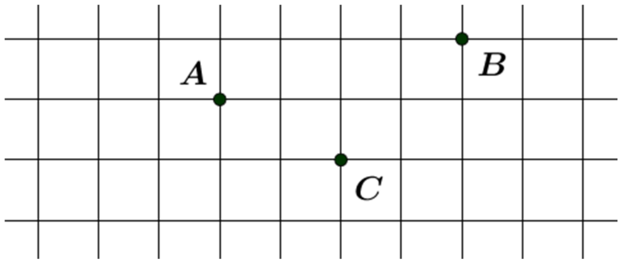
A06 $ABCD$ est un parallélogramme, on note α la mesure en degré de l'angle au sommet A et β celle au sommet B. Montrer que : $\alpha + \beta = 180$.

A07 $ABCD$ est un quadrilatère tel que ses angles opposés ont même mesure. Démontrer que c'est un parallélogramme.

A08 Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme : déterminer les mesures de chacun de ses angles.

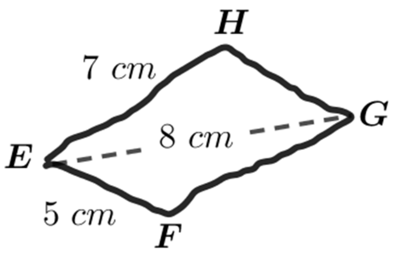


A09 Placer sans justification le point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.



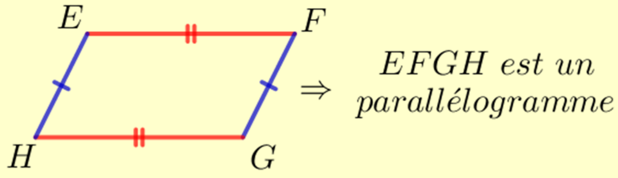
On précise que les carreaux sont des carrés de côté 1 cm : déterminer l'aire de $ABCD$.

A10 Écrire un programme de construction du parallélogramme $EFGH$ à la règle et au compas :

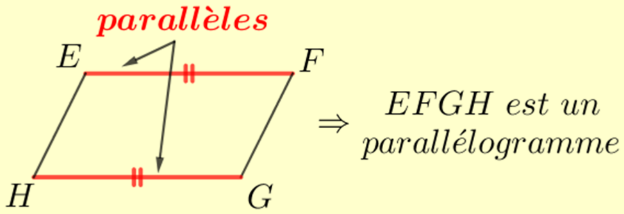


Propriétés (admises)

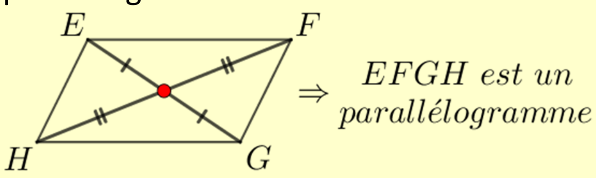
• « si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme »



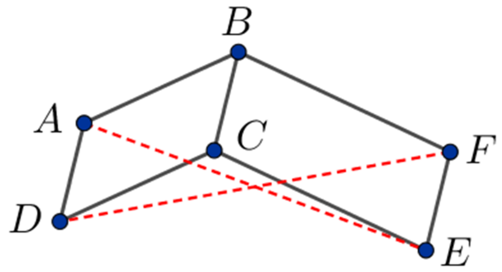
• « si un quadrilatère non croisé a deux de ses côtés opposés qui sont parallèles et de même longueur,
alors c'est un parallélogramme »



• « si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme »

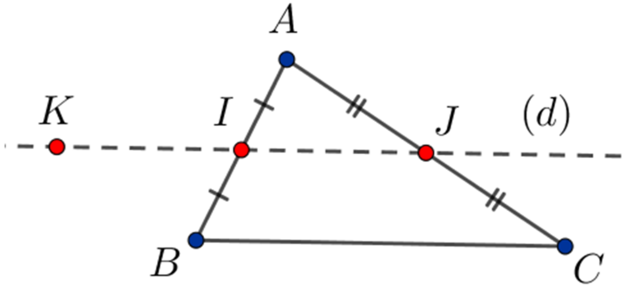


A11 $ABCD$ et $BCEF$ sont deux parallélogrammes :



$[AE]$ et $[DF]$ ont-ils même milieu ?

A12 ABC est un triangle, I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, on note K le symétrique de J par rapport à I et (d) la droite passant par I, J et K :



1. Déterminer la nature de $AJBK$.
2. En déduire la nature de $JCBK$.
3. Justifier que :

$$[IJ] \mathbin{/\!/} [BC] \text{ et } IJ = \frac{1}{2}BC$$

On vient de démontrer la propriété de quatrième : « dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté ».