Maths 5e 04. Calcul littéral FICHE

Définition
Une **écriture littérale** fait intervenir le plus souvent la lettre x, représentant un nombre dont la valeur est inconnue ou non fixée.

Règle
Lorsqu'on remplace la lettre x par un nombre, il faut le faire dans toute l'expression.

exemple
On pose $E = x^2$ et $F = 5x - 6$.

• pour $x = 3$

E	F
$= 3^2$	$= 5(3) - 6$
$= 3 \times 3$	$= 15 - 6$
$= 9$	$= 9$

On écrit : « si $x = 3$, alors $E = F$ ».

on connaît à présent une valeur de x pour laquelle $E = F$, mais on ne sait pas s'il en existe une autre ou pas.

• pour $x = 4$

E	F
$= 4^2$	$= 5(4) - 6$
$= 4 \times 4$	$= 20 - 6$
$= 16$	$= 14$

On écrit : « si $x = 3$, alors $E \neq F$ ».

vocabulaire
$8x^2$ est un terme de nature x^2, $13x$ est un terme de nature x, $7x^3$ et $5x^3$ sont deux termes de nature x^3.

Règle
Si **ajoute** ou **soustrait** des termes de **même nature** alors un regroupement est possible : on dit que l'on **réduit** l'expression.
La nature de la forme réduite est la même que celle des termes dont elle résulte.

exemple
Réduire les expressions A et B :

$A = -5x + x$	$B = 3x + x^2 - x$
$A = -5x + 1x$	$B = x^2 + 3x - x$
$A = (-5 + 1)x$	$B = x^2 + 3x - 1x$
$A = -4x$	$B = x^2 + (3 - 1)x$
	$B = x^2 + 2x$

Définition
Une **équation d'inconnue x** s'écrit $E = F$ où E et F sont deux expressions faisant intervenir x.
Si pour une valeur donnée à x on constate que $E = F$, alors cette valeur donnée à x est **une solution de l'équation**, sinon la valeur donnée à x n'est pas **une solution de l'équation**.

exemple
On considère l'équation : $5x - 2 = x + 14$.

• **4** est-il une solution ?
Calculons séparément les deux membres, pour $x = 4$:

$5x - 2$	$x + 14$
$= 5 \times 4 - 2$	$= 4 + 14$
$= 20 - 2$	$= 18$
$= 18$	

Les deux membres sont égaux donc **4** est une solution de l'équation.

• **3** est-il une solution ?
Calculons séparément les deux membres, pour $x = 3$:

$5x - 2$	$x + 14$
$= 5 \times 3 - 2$	$= 3 + 14$
$= 15 - 2$	$= 17$
$= 13$	

Les deux membres sont différents donc **4** n'est pas une solution de l'équation.

Définition
Résoudre l'équation c'est déterminer **toutes** les solutions de l'équation.

Méthode
Pour résoudre une équation on se ramène à
« $x =$ **un nombre connu** »
puis on écrit une phrase de conclusion.

À chaque étape, on a le droit :
- d'ajouter ou soustraire **le même nombre** à chaque membre,
- de multiplier ou **diviser** chaque membre par un même nombre non nul.

exemple
Résoudre l'équation : $x - 7 = 15$.

$$x - 7 = 15$$
$$x - 7 + 7 = 15 + 7$$
$$x = 22$$

L'équation admet une seule solution : 22.

exemple
Résoudre l'équation : $x + 13 = 10$.

$$x + 13 = 10$$
$$x + 13 - 13 = 10 - 13$$
$$x = -3$$

L'équation admet une seule solution : -3.

exemple

Résoudre l'équation : $\frac{x}{4} = 7$.

$$\frac{x}{4} = 7$$
$$\frac{x}{4} \times 4 = 7 \times 4$$
$$x = 28$$

L'équation admet une seule solution : 28.

exemple

Résoudre l'équation : $7x = 13$.

$$7x = 13$$
$$\frac{7x}{7} = \frac{13}{7}$$
$$x = \frac{13}{7}$$

L'équation admet une seule solution : $\frac{13}{7}$.

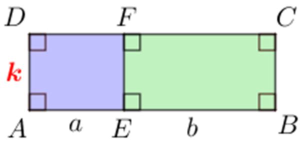
exemple

Résoudre l'équation : $\frac{x}{3} = -2$.

$$\frac{x}{3} = -2$$
$$\frac{x}{3} \times 3 = -2 \times 3$$
$$x = -6$$

L'équation admet une seule solution : -6.

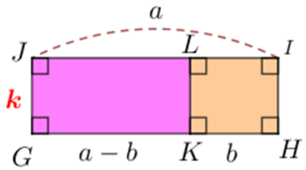
Une autre écriture pour $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$:



On raisonnant sur les aires, on obtient :

$$\underbrace{\boldsymbol{k} \times (a + b)}_{\mathcal{A}_{ABCD}} = \underbrace{\boldsymbol{k} \times a}_{\mathcal{A}_{AEFD}} + \underbrace{\boldsymbol{k} \times b}_{\mathcal{A}_{EBCF}}$$

Une autre écriture pour $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$:



On raisonnant sur les aires, on obtient :

$$\underbrace{\boldsymbol{k} \times (a - b)}_{\mathcal{A}_{GKLJ}} = \underbrace{\boldsymbol{k} \times a}_{\mathcal{A}_{GHIJ}} - \underbrace{\boldsymbol{k} \times b}_{\mathcal{A}_{KHIL}}$$

On admettra que les deux formules obtenues se généralisent à des nombres relatifs a, b et k.

Formule : identités remarquables

Pour tous nombres relatifs a, b et k on a :

- $\boldsymbol{k} \times (a + b) = \boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b$

Sans écrire le symbole « × », on obtient :

$$\underbrace{k(a + b)}_{forme\ factorisée} = \underbrace{ka + kb}_{forme\ développée}$$

- $\boldsymbol{k} \times (a - b) = \boldsymbol{k} \times a - \boldsymbol{k} \times b$

Sans écrire le symbole « × » on obtient :

$$\underbrace{k(a - b)}_{forme\ factorisée} = \underbrace{ka - kb}_{forme\ développée}$$

Lorsqu'elles sont lues de gauche à droite ces deux **identités remarquables** traduisent la **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction.

exemple

- $3 \times (4 + 6) = 3 \times 4 + 3 \times 6 = 12 + 18 = 30$
- $5 \times (x + 7) = 5 \times x + 5 \times 7 = 5x + 35$
- $4 \times (7 - 2) = 4 \times 7 - 4 \times 2 = 28 - 8 = 20$
- $6 \times (x - 2) = 6 \times x - 6 \times 2 = 6x - 12$

Pour développer $(a \pm b) \times k$:

- $(a + b) \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times (a + b) = \boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b$
- $(a - b) \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times (a - b) = \boldsymbol{k} \times a - \boldsymbol{k} \times b$

exemple

- $(x + 3) \times 2 = 2 \times (x + 3) = 2x + 6$
- $(4 - y) \times 3 = 3 \times (4 - y) = 12 - 3y$

Définition

Développer une expression signifie qu'il faut **obtenir à la fin** une **forme développée**.
Factoriser une expression signifie qu'il faut **obtenir à la fin** une **forme factorisée**.

exemple

- Développer : $2 \times (x + 3)$ et $7 \times (x - 1)$:

$$2 \times (x + 3) = 2 \times x + 2 \times 3 = \underbrace{2x + 6}_{forme\ développée}$$

$$7 \times (x - 1) = 7 \times x - 7 \times 1 = \underbrace{7x - 7}_{forme\ développée}$$

- Factoriser : $5x + 15$ et $6y - 12$:

$$5x + 15 = \underline{5} \times x + \underline{5} \times 3 = \underbrace{5(x + 3)}_{forme\ factorisée}$$

$$6y - 12 = \underline{6} \times y - \underline{6} \times 2 = \underbrace{6(y - 2)}_{forme\ factorisée}$$

Signe « − » devant une pérenthèse

Lorsque l'on développe, un signe « − » devant une parenthèse change les signes « + » en signes « − » et réciproquement.

exemple

Développer chacune des expressions :

- $-(3x - 5) = -3x + 5$
- $-(-x^2 + 7x) = +x^2 - 7x = x^2 - 7x$