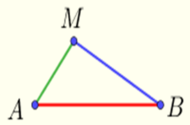
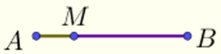
Propriété : inégalité triangulaire

Pour tous points A, B et M du plan, on a l'inégalité : $AB \leqslant AM + MB$. C'est l'inégalité triangulaire.



Cas de l'égalité

Si $M \in [AB]$, **alors** : $AB = AM + MB$.
Si $AB = AM + MB$, **alors** $M \in [AB]$.



Règle : critère d'existence d'un triangle

Il existe un triangle dont les côtés ont des longueurs données si et seulement si **la plus grande** des trois longueurs est inférieure strictement à la somme des deux autres.

exemple de rédaction

Existe-t-il un triangle dont les côtés ont pour longueurs 6, 13 et 5 ?
- la plus grande des trois distances est : 13
- la somme des deux autres est : $5 + 6 = 11$
- on constate que 13 n'est pas inférieur à $5 + 6$

donc il n'existe pas un tel triangle.

exemple de rédaction

Existe-t-il un triangle dont les trois côtés ont pour longueurs 7, 3 et 9 ?
- la plus grande des trois longueurs est : 9
- la somme des deux autres est : $7 + 3 = 10$
- on constate que $9 < 7 + 3$ donc il existe un tel triangle.

Propriété pour placer un nouveau point

Si un point est à une **distance** (non nulle) **connue** d'un **point connu** alors il est situé sur le cercle de centre ce **point connu** et de rayon cette **distance connue**.

Théorème

« La somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180° ».

Propriété

« Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure ».

Théorème

« La somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180° ».

Propriété

« Les angles qui encadrent la base d'un triangle isocèle ont même mesure ».

Théorème

« Si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle. »

Propriétés

« si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles ont pour mesure 60° »

« si les trois angles d'un triangle ont pour mesure 60°, alors ce triangle est équilatéral »

« Une mesure d'angle égale à 180° caractérise une situation d'alignement de trois points »

Définition

Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété

« Les trois **médianes** d'un triangle passent sont concourantes en un point appelé **centre de gravité** du triangle ».

Définition

La droite qui coupe perpendiculairement un segment en son milieu est la **médiatrice** de ce segment.

Propriété

Le point d'intersection des trois **médiatrices** d'un triangle est le centre du **cercle circonscrit** à ce triangle c'est-à-dire du cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Propriété

- « si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance des deux extrémités de ce segment ».
- « si un point est à la même distance des deux extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment ».

Définition

Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et est perpendiculaire au côté opposé.

Une hauteur peut ne pas couper le côté opposé (qui est un segment, non une droite).

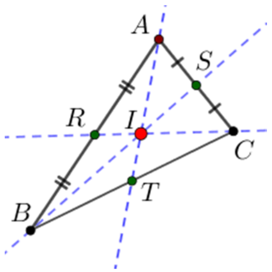
Propriété

« Les trois hauteurs d'un triangle se croisent en un point appelé **orthocentre** du triangle ».

Propriété

« si une droite possède deux des trois qualités d'une droite remarquable d'un triangle, alors c'est une droite remarquable de ce triangle.

Exemple



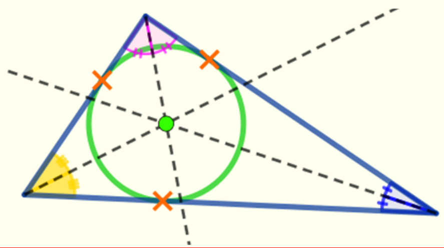
La droite (AI) coupe $[BC]$ en T.
Démontrer que T est le milieu de $[BC]$.

<u>On sait que</u> :
B est un sommet du triangle ABC et S est le milieu de $[AC]$.
<u>On utilise</u> :
la définition d'une médiane.
<u>On en déduit que</u> :
(BS) est la médiane issue de B du triangle ABC.
De même, (CR) est la médiane issue de C du triangle ABC.
<u>On sait que</u> :
I est le point d'intersection des médianes (BS) et (CR) du triangle ABC.
<u>On utilise</u> :
la propriété « les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle ».
<u>On en déduit que</u> :
I est le centre de gravité du triangle ABC.
<u>On sait que</u> :
A est un sommet du triangle ABC et I est le centre de gravité du triangle ABC.
<u>On utilise</u>
La propriété des deux critères d'une droite remarquable.
<u>On en déduit que</u> (AI) est la médiane issue de A du triangle ABC.

Or, les droites (AT) et (AI) sont confondues donc (AT) est la médiane issue de A du triangle ABC.
Par définition d'une médiane, on en déduit que T est le milieu de $[BC]$.

Définition
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

Propriété
Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du « cercle inscrit dans ce triangle », cercle ayant un seul point en commun avec chacun des côté de ce triangle :



Formule : aire d'un triangle

- aire d'un **triangle rectangle**

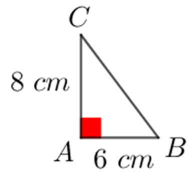
$$\mathcal{A}_{triangle\ rectangle} = \frac{1}{2} \times \text{produit des côtés de l'angle droit}$$

- aire d'un triangle **quelconque**

$$\mathcal{A}_{triangle} = \frac{1}{2} \times \text{côté} \times \text{hauteur associée}$$

Théorème de Pythagore
Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Exemple de rédaction
Calculons BC.



Le triangle ABC est rectanle en A donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que :

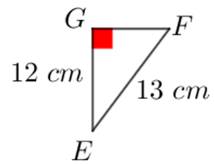
$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

En utilisant les distances connues on obtient :

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 36 + 64$$
$$BC^2 = 100$$

Or, $100 = 10^2$ donc $BC = 10$.
Finalement : $BC = 10\ cm$.

Exemple de rédaction



Calculons FG.
Le triangle EFG est rectanle en G donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que :

$$EF^2 = EG^2 + GF^2$$

En utilisant les distances connues on obtient :

$$13^2 = 12^2 + GF^2$$
$$169 = 144 + GF^2$$
$$169 - 144 = 144 + GF^2 - 144$$
$$25 = GF^2$$

Or, $25 = 5^2$ donc $GF = 5$.
Finalement : $FG = 5\ cm$.