Troisième Démonstrations –Trigonométrie

Séquence 1 : définition de cosinus, sinus, tangente

■ Propriété : cohérence de la définition de cosinus, sinus et tangente

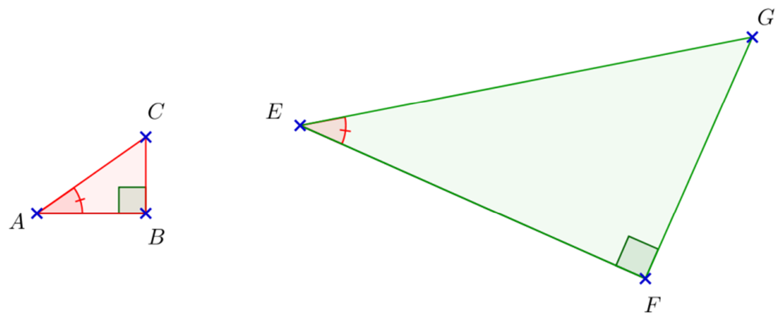
Dans un triangle rectangle, on décide de regarder l'un des deux angles aigus.
Les rapports :

i. $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ ***ii.*** $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ ***iii.*** $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

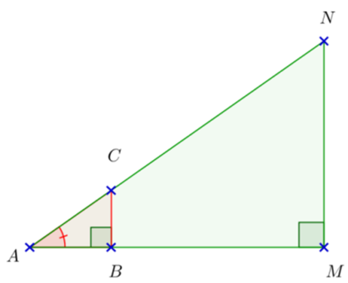
ne dépendent par de la « taille » du triangle rectangle considéré mais seulement de la mesure en degré de l'angle aigu qui est regardé.

□□ Démonstrations guidées

preuve de i. Montrons que le rapport $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ ne dépend que de la mesure de l'angle aigu.
Soit ABC et EFG deux triangles rectangles en B et F respectivement, et tels que : $mes\widehat{BAC} = mes\widehat{FEG}$:



Commençons par disposer une copie du triangle EFG, que nous noterons AMN, telle que :
A, B, M sont alignés,
AMN est rectangle en M,
$AM = EF$, $MN = FG$, $AN = EG$
(*figure ci-contre*)



1. Expliquer pourquoi les points A, C, N sont alignés.

2. Montrer que $(BC)//(MN)$.

3. Montrer que : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$. En déduire : $AB \times AN = AM \times AC$.

4. En divisant chaque membre de l'égalité précédente par : $AC \times AN$, obtenir une nouvelle égalié. Pourquoi cette égalité est-elle équivalente à : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EF}{EG}$?

La dernière égalité obtenue signifie que $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans le triangle ABC est égal à $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans le triangle EFG, et donc que ce quotient ne dépend que de la mesure de l'angle aigu regardé dans le triangle rectangle.

preuve de ii. Montrons que le rapport $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ ne dépend que de la mesure de l'angle aigu.

1. On a montré que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$. En déduire que : $BC \times AM = AB \times MN$.
2. Montrer que : $BC \times AN = AC \times MN$.
3. En déduire que : $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MN}{AN}$. Conclure.

preuve de iii. Montrons que le rapport $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ ne dépend que de la mesure de l'angle aigu.

Montrer que : $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{MN}{AM}$. Conclure. □□

■ Définition de cosinus, sinus et tangente

Soit ABC un triangle rectangle en B (comme sur la figure du début).

On a par définition : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$, $\tan\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$.

Remarques :

- $\boxed{\cos = \frac{adj}{hyp}}$, $\boxed{\sin = \frac{opp}{hyp}}$, $\boxed{\tan = \frac{opp}{adj}}$, relations que l'on peut « penser » mais que l'on ne peut pas écrire comme cela sur la copie.
- On pourra retenir le mot imaginaire : $\boxed{SOHCAHTOA}$.
  Il permet de retrouver facilement les définitions ; par exemple les trois premières lettes SOH sont présentent dans : « $S\text{in} = \frac{Opp}{Hyp}$ ».

Séquence 2 : formules

■ Formules d'encadrement de *cosa* et *sina*

Pour toute mesure a d'un angle aigu dans un triangle rectangle, on a :

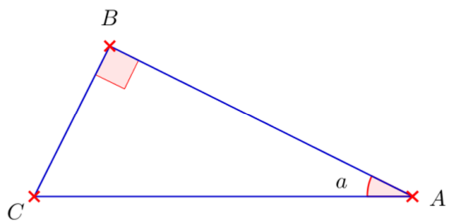
$$\boxed{0 < cosa < 1 \quad et \quad 0 < sina < 1}$$

□□ Preuve

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que mesure $\widehat{BAC} = a$.

On a : $\cos a = \frac{AB}{AC}$.

Comme les distances AB et AC sont deux nombres strictement positifs, on en déduit que $\cos a$ est strictement positif.



D'autre part, en utilisant le fait que le plus grand côté d'un triangle rectangle est l'hypoténuse, on en déduit que : $AB < AC$, puis en divisant par le nombre strictement positif AC, ce qui va conserver le sens de la relation d'ordre : $\frac{AB}{AC} < \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} < 1$, et comme $\cos a = \frac{AB}{AC}$, la dernière égalité s'écrit aussi : $\cos a < 1$. On a donc bien finalement : $0 < \cos a < 1$.

On démontrerait de même l'encadrement de $\sin a$. □□

■ Formule des carrés

Soit a le mesure en degré d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

On a : $\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$.

□□ Preuve

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = a$. On a : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$ et $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$. Posons $E = \cos^2 a + \sin^2 a$.

On a : $E = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \Leftrightarrow E = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \Leftrightarrow E = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$

Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore, on en déduit que : $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Remplaçons dans la dernière ligne du calcul de E : $E = \frac{AC^2}{AC^2} \Leftrightarrow E = 1$

Comme $E = \cos^2 a + \sin^2 a$, on en déduit finalement : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □□

■ Formule de la tangente

Soit a le mesure en degré d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

On a : $\boxed{\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}}$.

□□ preuve

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = a$. On a : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$, $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ et $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$.

On a : $\frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC \times AC}{AC \times AB} = \frac{BC}{AB}$;Or : $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$.

Donc : $\frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}} = \tan \widehat{BAC}$. Finalement, on a bien : $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$. □□